Тема №2
«Функция»

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан график функции (рис.1) . Заполнить таблицу значений функции.

Х	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
У													

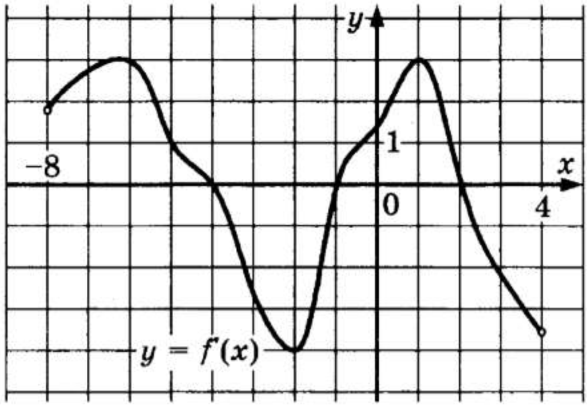
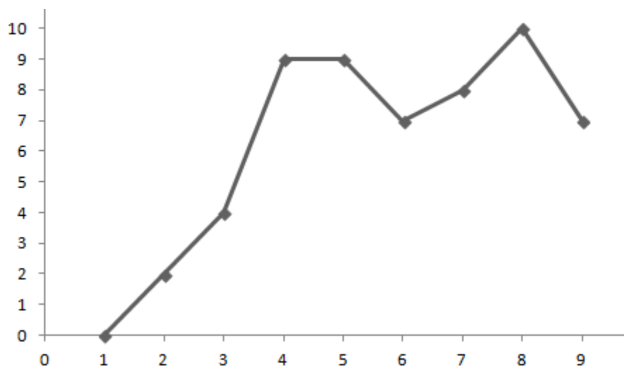


Рис.1

2. На рисунке изображен график осадков в Калининграде с 1 по 9 февраля 1974 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 2 до 8 мм осадков. Какое количество осадков выпало за последние два дня?



3. Построить график функции $y = \frac{10}{x^2+1}$ на интервале от -3 до 3

4. Найти первые пять элементов последовательности, если она задана формулой общего элемента

$$a_n = \frac{3n+2}{2n-1}$$

5. Вычислить пределы функции:

$$\lim_{x\to 3} x^5 =$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{x-3} =$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{5}{x-3} =$$

Теоретические вопросы

Назвать все известные элементарные функции и записать их формулой. Для каждой функции нарисовать график и указать, какими свойствами обладает функция.

Список элементарных функций:

Линейная
Обратная пропорциональность
Квадратная
Квадратичная
Степенная
Показательная
Логарифмическая
Тригонометрические функции

Свойства функции:

Свойство монотонности (возрастает, убывает, немонотонная функция)
Свойство ограниченности (ограничена сверху, снизу, неограниченная)
Свойство симметрии (четная, нечетная, общего вида)
Свойство периодичности (периодическая, непериодическая)
Свойство непрерывности (функция непрерывная, функция разрывная)
Выпуклость (на каких интервалах функция имеет выпуклость вверх, выпуклость вниз). Есть ли точки перегиба.

Точки экстремума (имеет ли функция точки максимума и точки минимума)

Тема №2
«Функция»

Числовая последовательность

Числовой последовательности и способы ее задания

Числовая последовательность – это ряд чисел, в котором каждый число (элемент последовательности) имеет свой порядковый номер.

Пример: 2 4 6 8 …. – последовательность четных чисел

$a_1 = 2$ *– первый элемент последовательности*

$a_2 = 4$ *- второй элемент последовательности*

$a_3 = 6$ *- третий элемент последовательности*

$a_4 = 8$ *- четвертый элемент последовательности*

Числовая последовательность кратко обозначается следующим образом $\{a_n\}$: a_1, a_2,, …, a_n , … , *где*

a_n *– n-ый элемент последовательности.*

Способы задания последовательности:

1) *словесный*

Пример: $\{a_n\}$- последовательность простых чисел, т.е. чисел, которые не имеют делителей, отличных от 1 и самого числа.

$\{a_n\}=\{2; 3; 5; 7; 11; 13\ldots\}$

2) *формулой общего элемента* последовательности a_n, которая позволяет, зная номер элемента, найти сам элемент.

элемента

Пример:

А) $a_n = 2\cdot n-1$ – формула общего элемента

$a_1 = 2\cdot 1-1=1$

$a_2 = 2\cdot 2-1=3$

$a_3 = 2\cdot 3-1=5$

…

$\{a_n\}=\{1; 3; 5;\ldots\}$

В) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ – формула общего элемента

$a_1 = \dfrac{1}{1^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

$a_2 = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

$a_3 = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ …

$\{ a_n \}=\{1; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{9}; \ldots \}$

3) *рекуррентной формулой,* которая позволяет находить очередной элемент, зная предыдущие элементы

Пример:

А) $a_1 = 100$ – первый элемент последовательности известен

$a_n = a_{n-1} - 10$ – для того чтобы найти новый элемент a_n, необходимо из предыдущего элемент a_{n-1} вычесть число 10

$a_1 = 100$

$a_2 = a_1 - 10 = 100 - 10 = 90$

$a_3 = a_2 - 10 = 90 - 10 = 80$

…

$\{ a_n \}=\{100; 90; 80; \ldots \}$

В) $a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ - для того, чтобы найти новый элемент a_n, необходимо сложить два предыдущих элемента

a_1 a_2 … a_{n-2} a_{n-1} a_n …

1 1 2 3 5 8 13 21 … - числа Фибоначчи

Свойства числовых последовательностей

1. Свойство монотонность последовательности

Последовательность называется *возрастающей*, если большему номеру элемента соответствует больший элемент:

$$1,\ 3,\ 5,\ \dots$$
$$2,\ 4,\ 6,\ \dots$$

Последовательность называется *убывающей*, если большему номеру элемента соответствует меньший элемент:

$$1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{9};\ \dots$$
$$100,\ 90,\ 80\ \dots$$

Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной*, в противном случае мы имеем дело с *немонотонной* последовательностью:

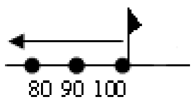
$$0;\ 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3\dots.$$

2. Свойство ограниченности последовательности

Последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что любой элемент последовательности не превышает это число, т.е. для всех n справедливо

$$a_n \le M$$

Пример: последовательность 100, 90, 80, …
ограничена сверху числом M=100



$a_1 \le 100$, $a_1 = 100$
$a_2 \le 100$, $a_2 = 90$
$a_3 \le 100$, $a_3 = 80$
…
$a_n \le 100$

Последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что любой элемент последовательности больше этого число, т.е.   для всех n справедливо

$$m \le a_n$$

Пример: последовательность 1, 3, 5, … ограничена снизу числом m=1

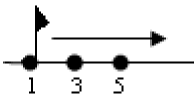
$1 \le a_1$, a_1 =1

$1\le a_2$, a_2 =3

$1 \le a_3$, a_3 =5

…

$m \le a_n$

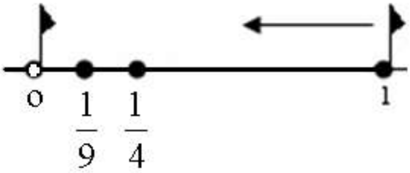


Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, в противном случае последовательность называется *неограниченной*.

Пример: последовательность $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \ldots$ - ограниченная

m=0 – нижняя граница существует, т.к. элементы последовательности никогда не будут отрицательными.

M=1



Предел числовой последовательности. Свойство сходимости.

Пределом последовательности $\{a_n\}$ называют число B, к которому, начиная с некоторого номера, стремятся все элементы последовательности при стремлении номера элемента n в бесконечность - ∞:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B$$

читается запись следующим образом: предел последовательности a_n при номере n, стремящемся в бесконечность , равен числу B.
Знак стремления принято изображать в виде стрелки. Смысл определения предела можно сформулировать и записать кратко: если n стремится в бесконечность, то элемент последовательности стремится к числу B, т.е. если $n\to\infty$, то $a_n \to B$.
$n\to\infty$ - означает, что номер элемента – очень большое число
$a_n \to B$ – означает, что элементы последовательности подходят к числу B на сколь угодно малое расстояние.

Если B – конечное число, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *сходящиеся*, в противном случае – *расходящиеся*.

Пример:

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $\{ a_n \}=\{1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \dots \}$

если $n\to\infty$, например n=1000000, то

$$a_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1000000^2} = 0{,}000\dots$$

Чем больше номер элемента последовательности, тем ближе элемент подходит к нулю, т.е. $a_n \to 0$. Используя понятие предела, запишем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Вывод: последовательность $a_n = \frac{1}{n^2}$ - сходящаяся

B) $a_n = 2\cdot n-1$, $\{ a_n \}=\{1;3;5 \dots \}$

если $n\to\infty$, например n=1000000, то a_n =2·1000000-1=1999999.

Чем больше номер элемента, тем больше сам элемент последовательности, т.е. $a_n \to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} (2n-1) = 2\cdot\infty-1 = \infty$$

Вывод: последовательность $a_n = 2\cdot n-1$ - расходящаяся

Для понимания предела очень важно уметь правильно манипулировать бесконечностью:

Бесконечность ∞ - очень большое число

$C\cdot\infty=\infty$ - *если бесконечность умножить на некоторое конечное число, то получится бесконечность*

$\infty\pm C=\infty$ - *если к бесконечности прибавить (вычесть) некоторое конечное число, то получится бесконечность*

$\infty^n=\infty$ - *если бесконечность возвести в положительную степень, то получится бесконечность*

$\frac{C}{\infty}=0$ *- при делении любого конечного числа на бесконечность получается очень маленькое число, практически ноль*

$\frac{C}{0}=\infty$ *- при делении любого конечного числа на очень маленькое число получается очень большое число, бесконечность*

Решение задач

Задача 1. Вычислить предел последовательности

1) $\lim\limits_{n\to\infty}$ [illegible]

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^5}=\frac{4}{\infty}=0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{\infty}=3-0=3$

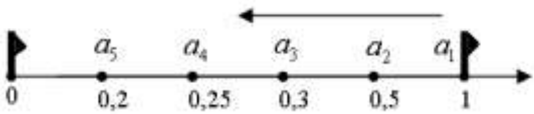
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{n^5+1}=\frac{\infty}{\infty}=\ldots=0$ вариант, когда степень числителя меньше степени знаменателя

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^9+4}{n^5+1}=\frac{\infty}{\infty}=\ldots=\infty$ вариант, когда степень числителя больше степени знаменателя

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4}{5n^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\ldots=\frac{3}{5}$ вариант, когда степени числителя и знаменателя совпадают

Задача 2. Числовая последовательность задача формулой общего элемента, найти первые пять элементов последовательности, изобразить их на числовом луче и указать свойства последовательности

$a_n=\frac{1}{n}\quad a_1=\frac{1}{1}=1\quad a_2=\frac{1}{2}=0{,}5\quad a_3=\frac{1}{3}=0{,}3\quad a_4=\frac{1}{4}=0{,}25\quad a_5=\frac{1}{5}=0{,}2$



Свойства последовательности:

1) **монотонность:** последовательность – убывающая
2) **ограниченность:** последовательность ограничена сверху (M=1) и снизу (m=0 – элементы не могут быть отрицательными числами)
3) **сходимость:** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$ - предел существует, следовательно, последовательность - сходящиеся

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Числовая последовательность задана формулой общего элемента. Вычислить и расположить первые пять элементов последовательности на числовом луче. Указать свойства последовательности

$$a_n = 36 - n^3$$

Задача 2. Вычислить предел последовательности

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n^2+n+5)$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{6}{n^3-8}\right)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+5}{8n^4-3n+6}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+5}{7n-9}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+5}{9n^2-47}$

Понятие функции

Пусть даны два произвольных множества X и Y.

Функция – это правило, по которому каждому элемента из множества **X** можно найти не более одного элемента из множества **Y.**

***y=f(x)* – общее обозначение функции,**

$x \in X$ - элемент x из множества X

$y \in Y$ - элемент y из множества Y

x **–** аргумент (независимая переменная функции)

y **–** результат функции (зависимая от x переменная)

Пример 1

Пусть X – множество людей, Y – множество паспортов граждан РФ. Зададим правило $y=f(x)$, по которому каждому человеку x подберем его паспорт y. У человека не может быть более одного паспорта, следовательно, указанное правило задает функцию. Примечание: будут люди, которым не достанется паспорта, т.к. они не проживают в РФ.

Пример 2

Пусть X – множество студентов, Y – множество изучаемых предметов. Зададим правило $y=f(x)$, по которому, каждому студенту x подберем предмет y, который он сдал на отлично. Т.к. студент может сдать несколько предметов на отлично, то студенту будет соответствовать более одного предмета из множества Y. Следовательно, указанное правило не является функцией.

Пример 3

Пусть X и Y - множество действительных чисел R. Зададим правило, по которому, любому числу x подберем y, которое вычисляется по правилу $y=2x$. Это правило является функцией, т.к. каждому x соответствует только один y:

$f(3)=2\cdot3=6$

$f(0)=2\cdot0=0$

$f(5)=2\cdot5=10$

Способы задания функции

Рассмотрим четыре способа задания функции.

1. *Словесный способ* - примеры 1 и 2
2. *Формулой (аналитический способ)* - формула позволяет, зная значение переменной x , найти переменную y.

Примеры функций: $y=x^2$ $y=2x$ $y=x+5$

3.*Табличный способ* – в таблице перечисляются пары значений x и y, которые принадлежат функции.

Необходимо помнить, что таблица не может содержать столбцы с одинаковыми значениями x, т.к. это будет противоречить определению функции.

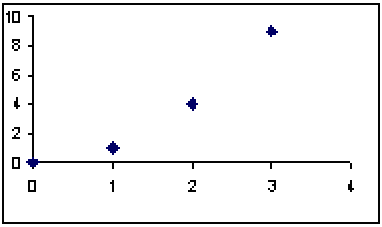
Построим таблицу значений функции $y=x^2$

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

4.*Графический способ* – на координатной плоскости строят точки ($(x;y)$, которые принадлежат функции.

Необходимо помнить, что график функции не может содержать точки с одинаковыми значениями x, т.к. это будет противоречить определению функции.

Нарисованный на рисунке график соответствует табличным значениям функции $y=x^2$.



Функции, заданные на числовых множествах называются числовыми. Множество $D_{f.}$ всех допустимых значений аргумента x, при которых функция $y = f(x)$ определена, называется *областью определения функции*.

Множество $E_{f.}$ всех значений y, которые принимает функция, называется *областью значений функции*.

При нахождении области определения следует большое внимание уделять функциям, заданных в виде дроби, и функциям, содержащих квадратные корни.

Рассмотрим задачи на нахождение области определения.

Задача 1. Найти область определения функции $y=\dfrac{x+3}{x-2}$

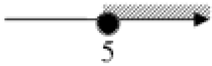
Решение: Функция задана в виде дроби, а дробь имеет смысл только тогда, когда знаменатель не равен нулю. Приравняем знаменатель к нулю, чтобы исключить эти значения из области определения.

x-2=0

x=2

Область определение $D_{f.}$ – множество всех чисел, кроме x=2

Задача 2. Найти область определения функции $y=\sqrt{x-5}$
Решение: Функция задана в виде квадратного корня, корень имеет смысл только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательное. Потребуем, чтобы подкоренное выражение было больше нуля.
x-5≥0
x≥5

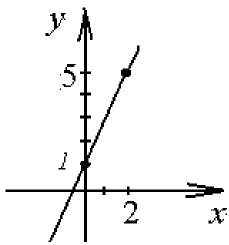


Область определения $D_{f.}$=[5;+∞)

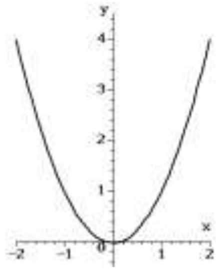
Элементарные функции и их графики

1. $y=kx+b$ – *линейная функция* , где $k\neq 0$ Графиком линейной функции является прямая .
$D_{f.}$ – множество действительных чисел R
$E_{f.}$ – множество действительных чисел R
Например: $y=2x+1$

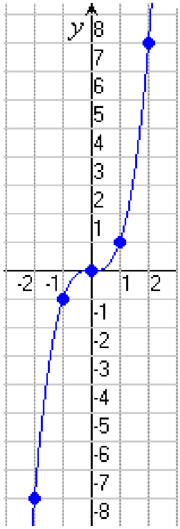
x	0	2
y	1	5



2. $y = x^2$ - *квадратная функция*. Графиком является парабола.
$D_{f.}$ – множество действительных чисел R
$E_{f.}$ – множество неотрицательных чисел R_+



3. $y = x^3$ - *кубическая функция*. Графиком является кубическая парабола



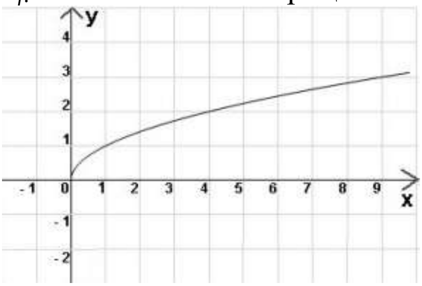
$D_{f.}$ – множество действительных чисел R

$E_{f.}$ – множество действительных чисел R

4. $y = \sqrt{x}$ - *квадратичная функция*

$D_{f.}$ – множество неотрицательных чисел R_+

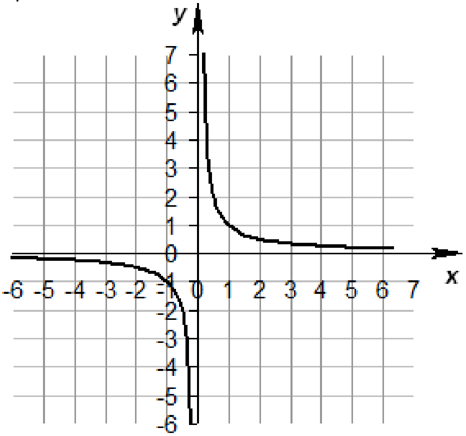
$E_{f.}$ – множество неотрицательных чисел R_+



5. $y=\frac{1}{x}$ - *обратная пропорциональность*. Графиком является гипербола

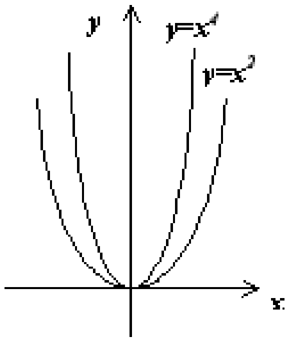
$D_{f.}$ – множество всех действительных чисел R , кроме x=0

$E_{f.}$ – множество всех действительных чисел R , кроме x=0



6. Функция вида *$y=x^n$*, где *n* – любое число называется *степенной функцией*.

Примеры: $y=x^2$ $y=x^3$ $y=x^{-4}$ $y=x^{\frac{1}{3}}$



Свойства степенной функции и ее график зависят от показателя степени *n*.

n – положительное четное число.

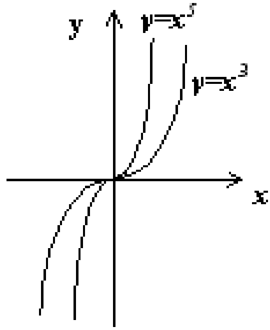
Примеры: $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^{10}$.

Графиком функции служит парабола, симметричная относительно оси OY.

n– положительное нечетное число

Примеры: $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^{13}$.

Графиком функции служит парабола, симметричная относительно начала координат.



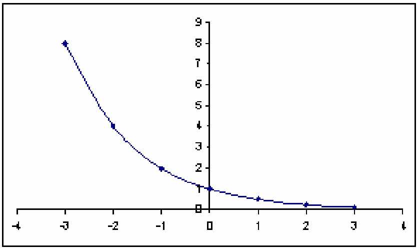
7. Функция вида $y=a^x$, где a – любое положительное число не равное единице, $a>0$ и $a\neq1$, x – любое действительное число, называется *показательной функцией*.

Примеры: $y=2^x$; $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y=0{,}3^x$; $y=10^x$

Свойства показательной функции и ее график зависят от основания степени a. Рассмотрим два случая:

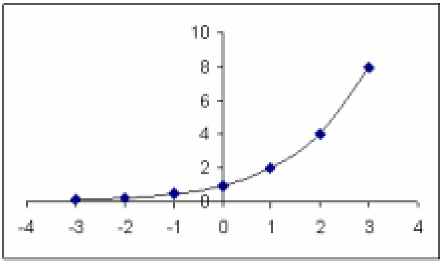
1-й случай: $0<a<1$.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$



2-й случай: $a>1$.

$y=2^x$

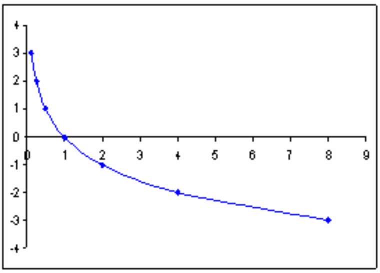


8. Функция вида $y=\log_a x$, где основание логарифма a - положительное и не равное единице число: $a>0$ и $a\neq1$, называется ***логарифмической функцией***.

Свойства логарифмической функции и ее график зависят от основания логарифма, числа a. Рассмотрим два случая:

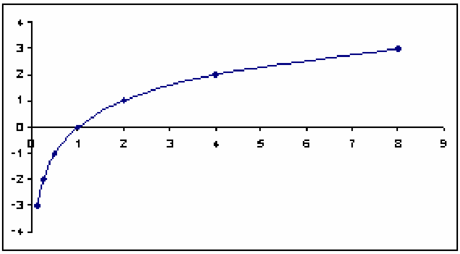
1-й случай: $0<a<1$.

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x$$



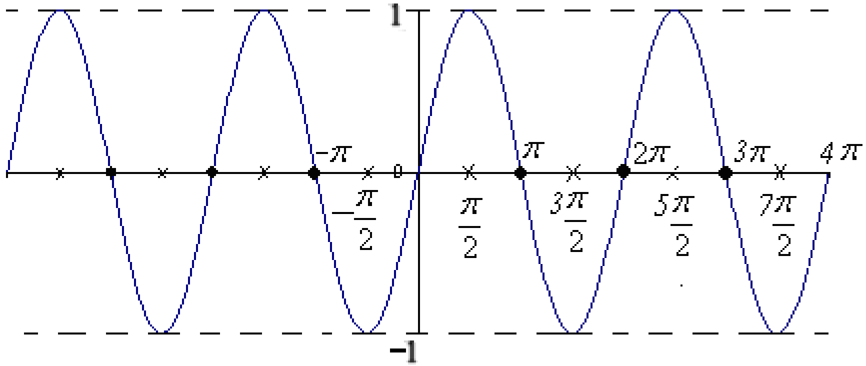
2-й случай: $a>1$.

$y=\log_2 x$

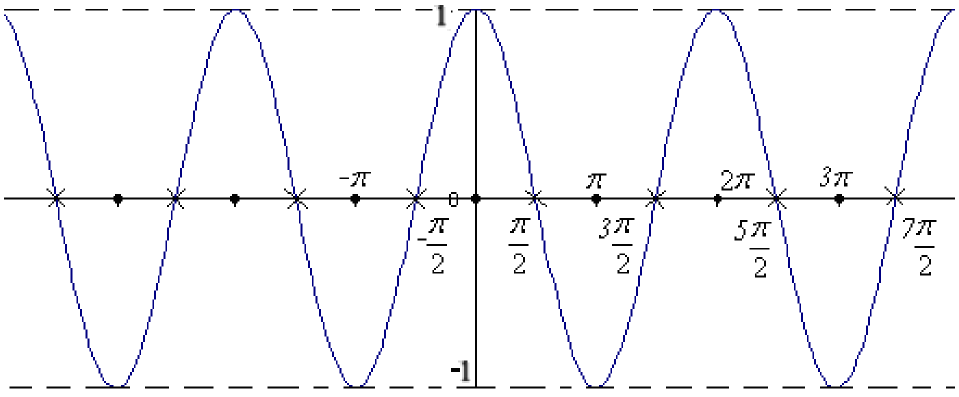


9. Тригонометрические функции

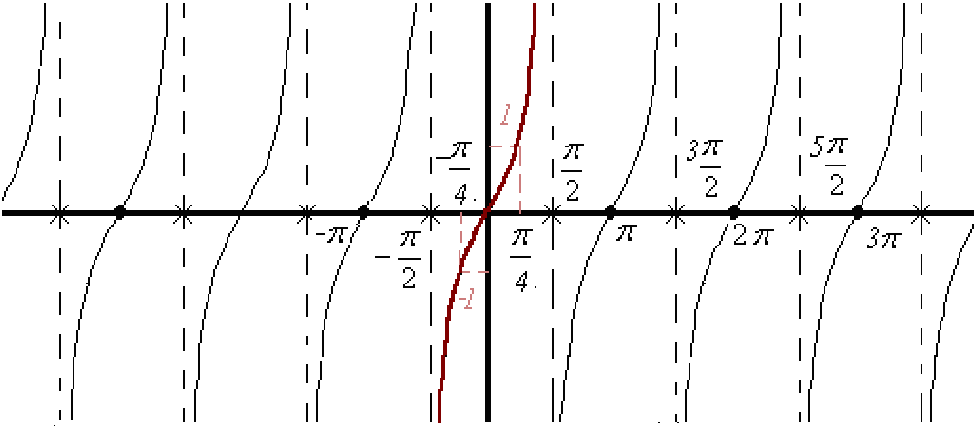
Функция синус - y=sin(x)



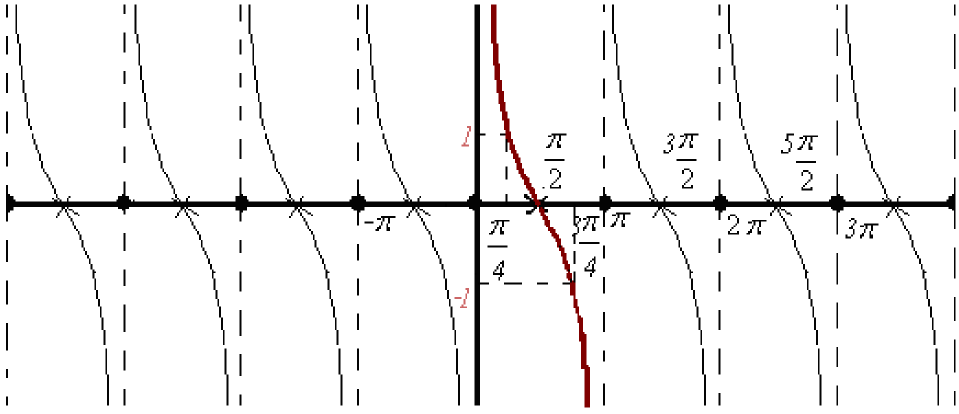
Функция косинус - y=cos(x)



Функция тангенс y=tg(x)



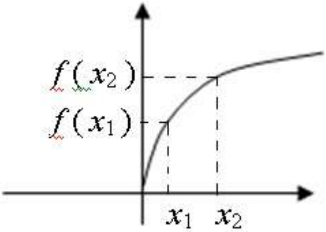
Функция котангенс y=ctg(x)



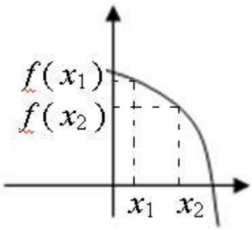
Свойства функции

1. Свойство монотонности функции

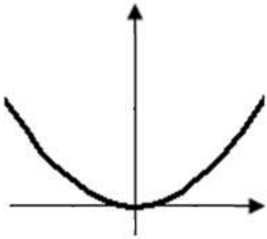
Если большему значению переменной *x* соответствует большее значение функции *y=f(x)*, то такая функция называется *возрастающей*. Т.е., если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.
Если большему значению переменной *x* соответствует меньшее значение функции *y=f(x)*, то такая функция называется *убывающей* .
Т.е., если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.
Функция, которая только возрастает или только убывает, называется *монотонной*, в противном случае функция называется *немонотонной*



возрастающая функция

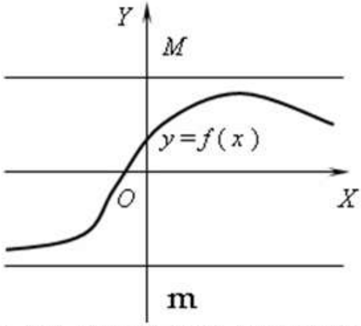


убывающая функция

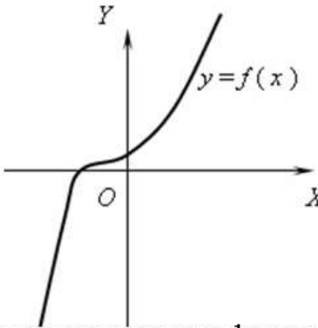

немонотонная функция

2. Свойство ограниченности функции.

Функция называется *ограниченной сверху*, если существует такое число *M*, что для всех значений *x* справедливо $f(x) \le M$.
Функция называется *ограниченной снизу*, если существует такое число *m*, что для всех значений *x* справедливо $m \le f(x)$.
Функция называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, в противном случае функция называется *неограниченной*



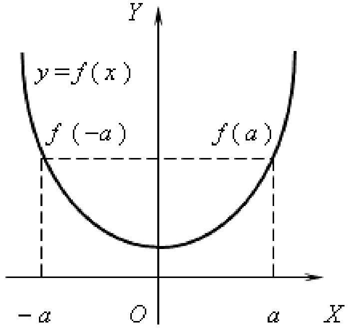
функция ограничена сверху и снизу



неограниченная функция

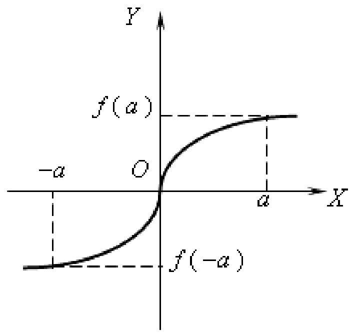
3. Четность и нечетность функции (свойство симметрии).

Если для *любого а* из области определения функции имеет место: $f(-a) = f(a)$, то функция называется *чётной*; Т.е. для четной функции, если меняется знак у переменной *x*, то знак функции не меняется



Пример: $y = x^2$ - четная функция, т.к. $(-x)^2 = x^2$

Если для *любого а* из области определения функции имеет место: $f(-a) = -f(a)$, то функция называется *нечётной*. Т.е. для нечетной функции, если меняется знак у переменной *x*, то знак функции меняется.



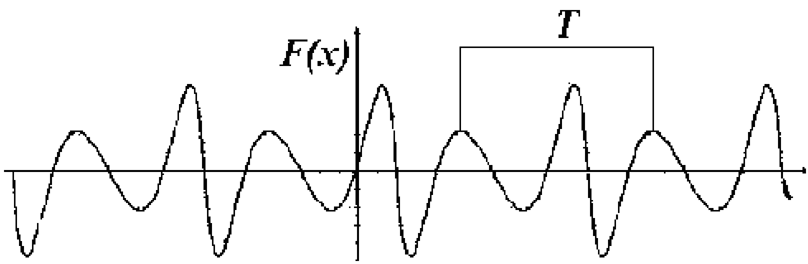
Пример: $y = x^3$ - нечетная функция, т.к. $(-x)^3 = -x^3$

График чётной функции *симметричен относительно оси Y*, а график нечётной функции *симметричен относительно начала координат*. Если функция не обладает симметрией, то такая функция называется функцией *общего вида*.

4. Свойство периодичности функции

Периоди́ческая фу́нкция — функция, повторяющая свои значения через некоторый определенный интервал *T*, т.е. для любого значения *x* будем иметь: *$f(x)=f(x+T)=f(x-T)$, где T –период функции*

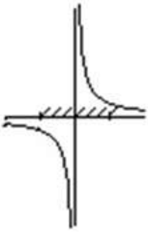
График периодической функции состоит из повторяющихся «рисунков».



5. **Свойство непрерывности функции**.

Свойство непрерывности функции связано с таким понятием, как предел функции в точке. По графику функции можно определить, является ли функция непрерывной, используя следующие рассуждения: если на интервале график функции можно нарисовать, не отрывая карандаш от листа бумаги, то такая функция непрерывна на этом интервале.

непрерывная функция

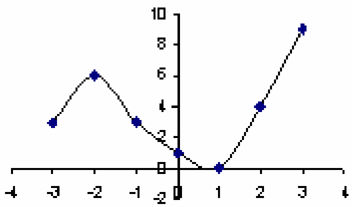


разрывная функция

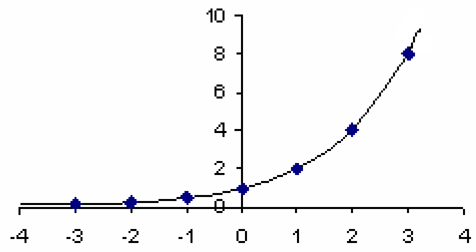
Решение задач

Задача 1 . По точкам построить график функции.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	3	6	3	1	0	4	9



Задача 2. Указать по графику свойства функции.

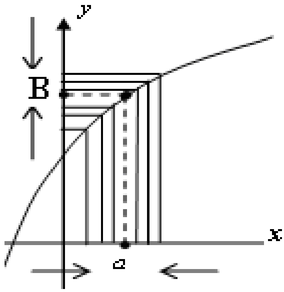


Свойства функции	Ответ
D_f - область определения (значения x)	x – любое число
E_f - область значения функции (значения y)	$(0;+\infty)$
Функция *возрастающая*, *убывающая* или *немонотонная*	возрастающая
Ограничена *сверху*, *снизу*, *неограниченная*	снизу
Четная функция – симметрия относительно оси OY *Нечетная* функция – симметрия относительно начало координат *Общего* вида	Общего вида
Периодическая или непериодическая	непериодическая
Непрерывная / разрывная	непрерывная

Предел функции

Число **B** называется *пределом* функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если из того, что переменная x стремится к a, следует, что функция $y=f(x)$ стремится к B, т.е., если $x \to a$, то $f(x) \to B$

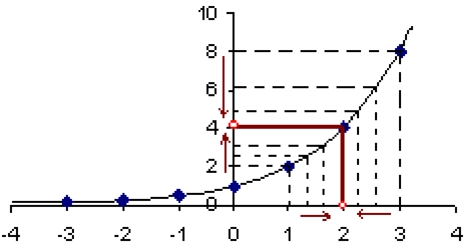
$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$



Стремление переменной x к a означает то, что мы слева и справа подходим к числу a на сколь угодно малое расстояние. При этом, значения функции $y=f(x)$ сверху и снизу подходят к числу B на сколь угодно малое расстояние.
Предел показывает, как ведет себя функция $y=f(x)$, зная поведение переменной x.

Пример.

Рассмотрим график функции и определим предел функции в точке $x=2$



Если x стремится к 2 слева и справа, то значения функции $f(x)$ стремятся сверху и снизу к числу 4.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4, \ x \to 2, \ y \to 4$$

Непрерывность функции. Точки разрыва

Опр. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если функция существует в этой точке и предел функции в точке равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

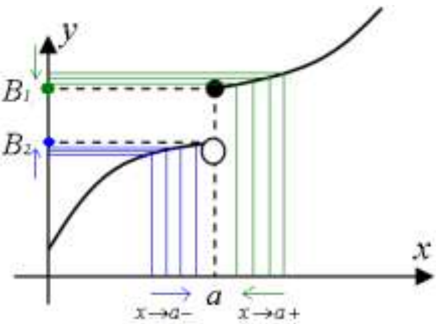
Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то функция называется *разрывной* в точке $x = a$.

Если функция непрерывна во *всех точках своей области определения*, то она называется *непрерывной функцией*.

Опр. Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называют *точками разрыва функции*.

Рассмотрим примеры точек разрыва.

Пример 1.

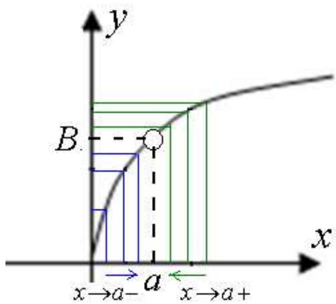


В точке $x=a$ функция существует. Слева от точки $x=a$ функция стремится к числу B_2, через предел это записывается следующим образом: $\lim_{x \to a-} f(x) = B_2$ - предел слева

Справа от точки $x=a$ функция стремится к числу B_1, через предел это записывается следующим образом: $\lim_{x \to a+} f(x) = B_1$ - предел справа

Найденные пределы слева и справа не совпадают, $B_1 \neq B_2$, т.е. не существует однозначного предела в точке, $x=a$ – *точка разрыва.*

Пример 2.



Функция в точке $x=a$ не существует.

$\lim_{x \to a-} f(x) = B$ - предел слева

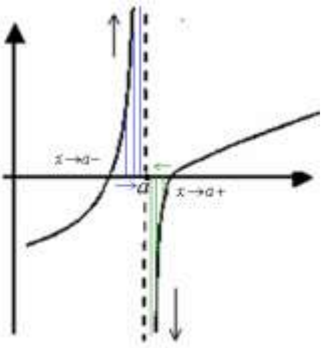
$\lim_{x \to a+} f(x) = B$ - предел справа

Слева и справа пределы совпадают, но они не равны значению функции в точке.

$x=a$ – точка разрыва

Пример 3.

Функция в точке $x=a$ не существует.



$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$ - предел слева

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$ - предел справа

x=a – точка разрыва

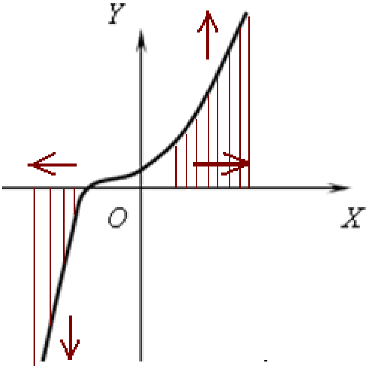
Предел функции на бесконечности

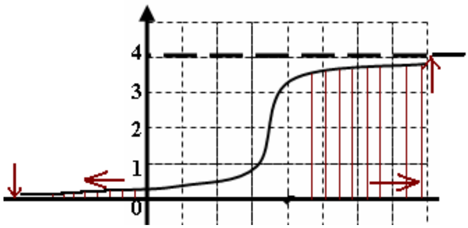
Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$.

$x \to +\infty$ - означает, что x неограниченно стремится вправо

$x \to -\infty$ - означает, что x неограниченно стремится влево

Когда x стремится в бесконечность, то значения функции $y = f(x)$ могут стремится в бесконечность или к некоторому конечному числу.





$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Вычисление предела функции в точке и на бесконечности

При вычислении пределов функции потребуются определение непрерывности функции в точке и известные уже утверждения:

$\frac{C}{0}=\infty$ - *при делении любого конечного числа на сколь угодно малое число получается сколь угодно большое число*

$\frac{C}{\infty}=0$ - *при делении любого конечного числа на сколь угодно большое число получается сколь угодно малое число*

Задача 1. Если известно, что функция непрерывна в точке $x=a$, то можно подставить значение $x=a$ в функцию: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\lim_{x\to 3}(2x-1)=2\cdot 3-1=5$ - функция непрерывна, подставляем значение $x=3$ в функцию

Задача 2. Предел в точке разрыва

$\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2\cdot 3-1}{3-3}=\frac{5}{0}=\infty$ - при подстановке $x=3$ в функцию, получили деление на сколь угодно малое число

Задача 3. Предел на бесконечности

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+4}{x^5+1}=\frac{\infty^2}{\infty^5}=\frac{1}{\infty^3}=\frac{1}{\infty}=0$ - вариант, когда степень числителя меньше степени знаменателя

Задача 4. Предел на бесконечности

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^9+x^4+4}{x^5+1}=\frac{\infty^9}{\infty^5}=\infty^4=\infty$ - вариант, когда степень числителя больше степени знаменателя

Задача 5. Предел на бесконечности

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+4}{5x^2+1}=\frac{3\infty^2}{5\infty^2}=\frac{3}{5}$ - вариант, когда степени числителя и знаменателя совпадают

Задача 6. Предел на бесконечности

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^5+1}=\frac{4}{\infty}=0$

Задача 7.

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-7}=\sqrt{3-7}=\sqrt{-4}$ - т.к. корень из отрицательного числа не существует, то предел тоже не существует.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 1. Найти пределы функций

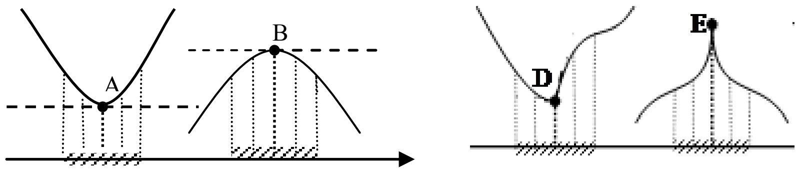
$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2)$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-2)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+6}{3x^7-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^7-1}{2x^2-5}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^7-1}{7x^7-1}$

Задача 2. Для некоторой точки привести примеры двух графиков, один график непрерывен в этой точке, а другой график терпит разрыв в этой точке.

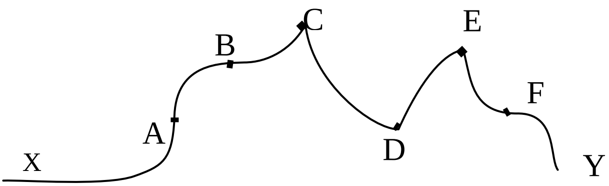
Точки экстремума

Точка *минимума* – это точка, в которой функция принимает наименьшее значение по сравнению со значениями функции в пределах некоторой окрестности этой точки.
Точка *максимума* – это точка, в которой функция принимает наибольшее значение по сравнению со значениями функции в пределах некоторой окрестности этой точки .
Точки минимума и максимума называются *точками экстремуму.*



точка A – точка минимума.
точка B – точка максимума.
точки A и B – точки экстремума.
Точки экстремума могут быть гладкими (точка A и B) и угловыми (D и E) .

Пример: Определим по графику точки экстремума:



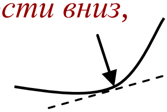
Точки максимума – C, E
Точки минимума - D

Замечание: Точки экстремума могут быть как гладкими, так и угловыми. Все вершины – это точки максимума, а все впадины – это точки минимума.

Выпуклость функции. Точки перегиба.

График функции на интервале имеет направление *выпуклости вверх,* если график функции располагается ниже касательной, проведенной в любой точке интервала

График функции на интервале имеет направление *выпуклости вниз,* если график функции располагается выше касательной, проведенной в любой точке интервала.



Точки перегиба – это точки, в которых меняется направление выпуклости.

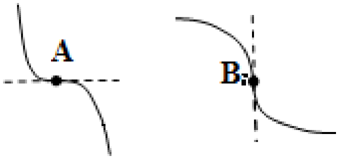


Рис.1

Пример: Для рисунка имеем A – точка перегиба с горизонтальной прямой и B – точки перегиба с вертикальной касательной.