Тема №4 «Тригонометрия»

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Зная, что π - это 180º, заполнить пустые клетки таблицы

Угол в градусах	30 º	550 º			
Угол в радианах			$\frac{\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{5}$	5π

Задача 2. В каких координатных четвертях располагаются углы, определить знаки тригонометрических функций для углов.

Угол	305º	230º	$\frac{5\pi}{4}$	-300º	750º
четверть					
sin(α)					
cos(α)					
tg(α)					
ctg(α)					

Задача 3. Известно, что $\sin(\alpha) = -\frac{4}{5}$ и угол α принадлежит третьей четверти $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. Используя основное тригонометрическое тождество, найти значения тригонометрических функций: *cos(α), tg(α), ctg(α).*

Задача 4. Вычислить:

A) $\sin 150^o \cdot \cos\frac{\pi}{4}$ *B*) $tg\frac{3\pi}{2}$ *C*) $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) + arctg(\sqrt{3})$ *D*) $acrcos 0^o - arcctg 1$

Задача 5. Какой из графиков тригонометрических функций обладает свойствами*: функция на каждом периоде возрастает, функция неограниченная, функция нечетная, функция разрывная.*

Теоретические вопросы

1. Что называется косинусом произвольного угла, с какой осью связан косинус, и какие знаки принимает косинус по четвертям?
2. Что называется синусом произвольного угла, с какой осью связан синус, и какие знаки принимает синус по четвертям?

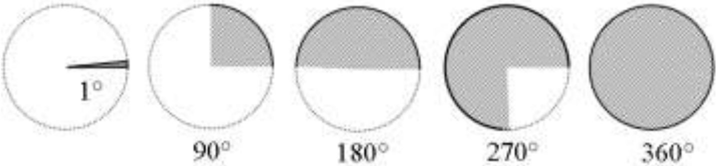
3. Что называется тангенсом и котангенсом угла, и какие знаки они принимают по четвертям?
4. Записать основное тригонометрическое тождество.
5. Что называется арксинусом, арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом числа?

ТРИГОНОМЕТРИЯ

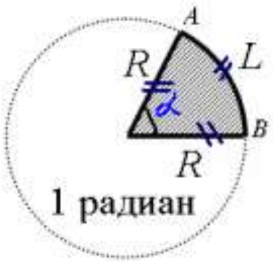
Градусная и радианная мера угла

Из школьного курса математики известно, что углы измеряются в градусах.

Опр. Угол в **1°** соответствует $\frac{1}{360}$ части окружности.



Если взять окружность определенного радиуса, то любому центральному углу α окружности соответствует дуга *AB*. Зафиксируем такой центральный угол, для которого длина дуги *AB* будет равна радиусу окружности: $R = L$



Опр. *Угол в 1 радиан* – это угол, для которого длина соответствующей ей дуги равна радиусу окружности.

$$\alpha = 1 \text{ радиан}$$

Как величина угла в 1° не зависит от радиуса окружности, так и величина угла в 1 радиан не зависит от радиуса окружности.

Вспомним формулу длины окружности

$$C = 2\pi R$$

Длине окружности $C=2\pi R$ соответствует угол в 360° . Узнаем, сколько радиан в целой окружности, т.е. в 360° . Составим пропорцию, в которой слева записана длина дуги, а справа угол в радианах.

L=R – 1 радиан

C=2πR – - x радиан

$$\frac{R}{1}=\frac{2\pi R}{x}$$

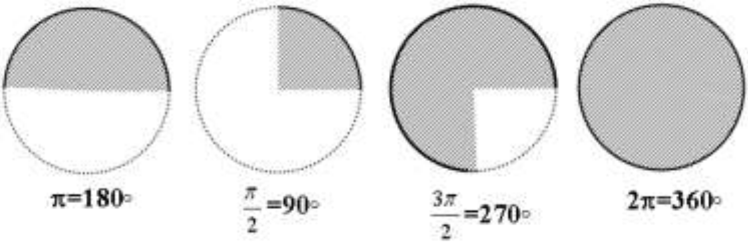
$$Rx=2\pi R$$

$$x=2\pi$$

Т.о. углу 360° соответствует угол в радианах, равный 2π.

2π=360°

π=180°



Рассмотрим задачи перехода от одной меры угла к другой.

Задача 1. Сколько радиан в 10°.

Решение. Используя соотношение π=180° , составим пропорцию, в которой слева записан угол в радианах, а справа угол в градусах.

$x-10°$

$\pi-180°$

$$\frac{x}{10}=\frac{\pi}{180}$$

$$180x=10\pi$$

$$x=\frac{10}{180}\pi$$

$$x=\frac{\pi}{18}$$

Задача 2. Сколько градусов в $\frac{3}{4}\pi$.

<u>Решение.</u> Используя соотношение $\pi=180°$, запишем

$$\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\cdot180=\frac{3\cdot180}{4}=135^0$$

Задача 3. Сколько градусов в 2 радианах.
<u>Решение.</u> Используя соотношение $\pi=180°$, составим пропорцию, в которой слева записан угол в радианах, а справа угол в градусах.

$2-x\,°$

$\pi-180°$

$$\frac{2}{x}=\frac{\pi}{180}$$

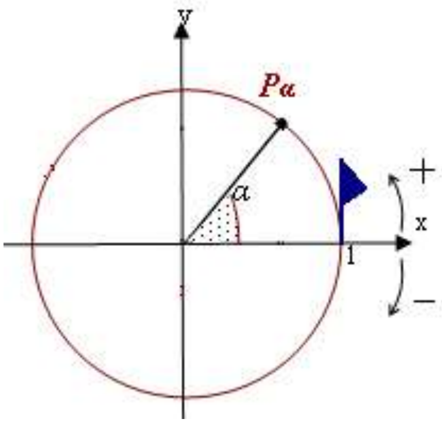
$$2\cdot180=\pi\cdot x$$

$$x=\frac{2\cdot180}{\pi}$$

$$x=\frac{360}{3{,}14}\approx115^0$$

Единичная окружность

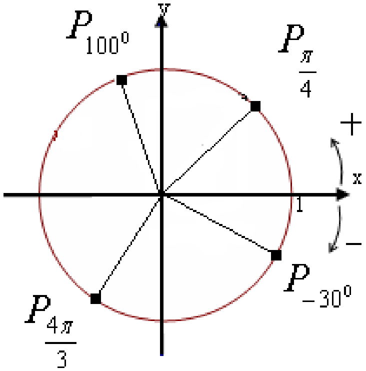
Опр. *Единичная окружность* – это окружность, центр которой лежит в начале координат, а радиус равен единице.



Будем на этой окружности от положительного направления оси OX *против хода* часовой стрелки откладывать **положительные углы**, а по ходу часовой стрелки – **отрицательные углы**.
Для любого угла можно найти точку

на единичной окружности, причем единственную.
Пусть углу α соответствует единственная точка Рα.

Изобразим точки на единичной окружности P_{100^0}, $P_{\frac{\pi}{4}}$, P_{-30^0}, $P_{\frac{4\pi}{3}}$.



Если выбрать точку на единичной окружности, то ей соответствует не один угол, а бесконечное множество углов. Так в точку P_{100^0} попадут точки для углов: 460°, 820°, -260° и т.д.
Если взять произвольный угол α, то углам вида:

$\alpha \pm 360°\cdot k$ или $\alpha \pm 2\pi k$, где k- любое целое число

будет соответствовать одна и та же точка на окружности.
Угол 360°=2π соответствует полному обороту окружности.
Углы 360°·k=2πk соответствуют нескольким полным оборотам окружности.
Знак ± показывает, что полные обороты можно производить как против хода часовой стрелки, так и по ходу часовой стрелки.
Для нашего примера будем иметь:
α =100°
460°=100°+360°
820°=100°+360°·*2*=100°+720°
-260°=100°-360°

Для того чтобы найти точку, которая соответствует углу 850°, необходимо выделить полные обороты, поделив угол на 360.

$$\begin{array}{r|l} -850 & 360 \\ \cline{2-2} 720 & 2 \\ \cline{1-1} 130 & \end{array}$$

860°=130°+360°·2

Т.о., $P_{850^0} = P_{130^0}$, где 130° – это остаток от деления на 360°

Единичная окружность проходит через координатные четверти, которым соответствуют углы единичной окружности.

I четверть : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$0 < \alpha < 90^0$

II четверть : $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

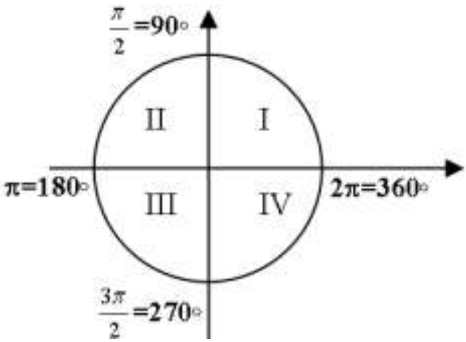
$90^0 < \alpha < 180^0$

III четверть : $\pi < \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$

$180^0 < \alpha < 270^0$

IV четверть : $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha \le 2\pi$

$270^0 < \alpha < 360^0$



Задачи для самостоятельного решения

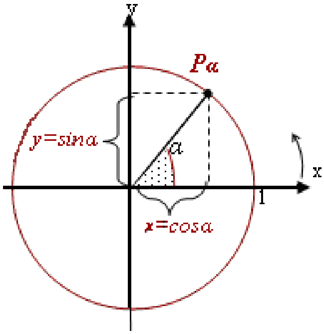
1. Изобразить углы на единичной окружности и указать, в каких координатных четвертях они располагаются.

Угол	215°	331°	$\frac{\pi}{3}$	-200°	790°
четверть					

2. Назовите угол в градусах, который лежит во II четверти.
3. Назовите угол в радианах, который лежит во IV четверти.

Тригонометрические функции

Рассмотрим единичную окружность. Для некоторого угла α найдем на окружности точку Pα. Точка Pα имеет две координаты *x* и *y*, которые соответственно откладываются по осям *OX* и *OY* и называются *x* - *абсциссой* и *y* - *ординатой*.



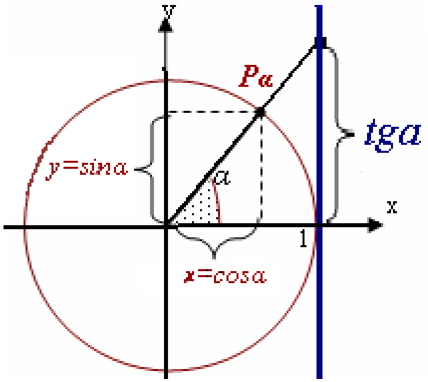
Опр. *Косинусом* произвольного угла называют абсциссу точки единичной окружности: *x=cosα*.

Опр. *Синусом* произвольного угла называют ординату точки единичной окружности: *y=sinα*.

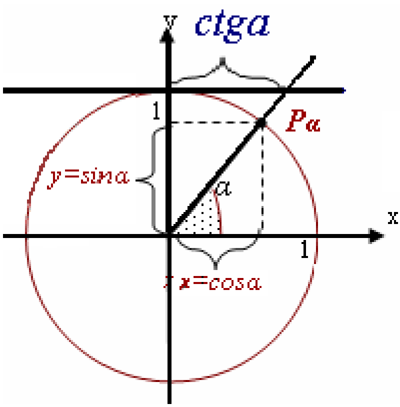
Опр. *Тангенсом* произвольного угла называют отношение синуса к косинусе $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, при условии, что *cosα≠0*

Опр. *Котангенсом* произвольного угла называют отношение косинуса к синусу $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, при условии, что *sinα ≠0*

Тангенс угла связан с *линией тангенса* – это вертикальная прямая, которая проходит через точку (1;0). **Тангенс угла** – это ордината *y* точки,



которая лежит на линии тангенса и соответствует углу.

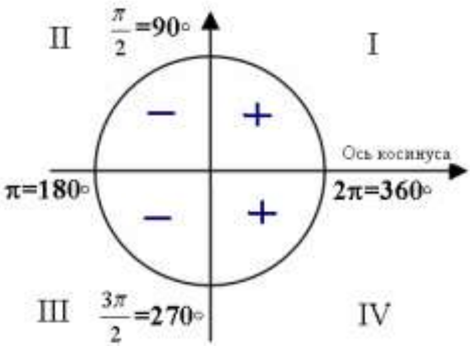


Котангенс угла связан с *линией котангенса* – это горизонтальная прямая, которая проходит через точку (1;0). **Котангенс угла** – это абсцисса *x* точки, которая лежит на линии котангенса и соответствует углу.

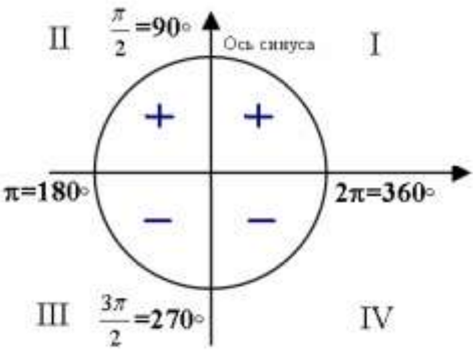
Знаки тригонометрических функций

Согласно определению тригонометрических функций расставим знаки тригонометрических функций по четвертям.

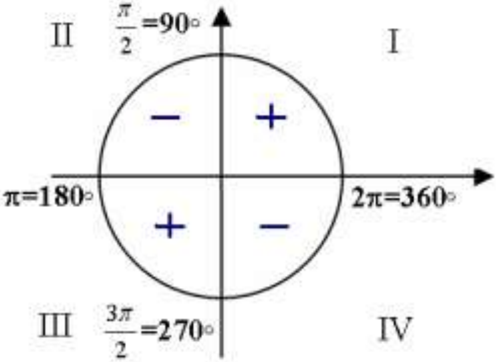
Знаки косинуса
cosα



Знаки синуса
sinα.



Знаки тангенса и котангенса - ***tgα , ctgα***



Задача. Найти знак выражения:

$$\frac{\sin 10^0 \cdot tg\frac{4\pi}{5}\cdot \cos 205^0}{ctg 350^0 \cdot \sin\frac{10\pi}{7}} = \frac{+\cdot - \cdot -}{-\cdot -} = +$$

Табличные значения тригонометрических функций

Функция	Аргумент α								
	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

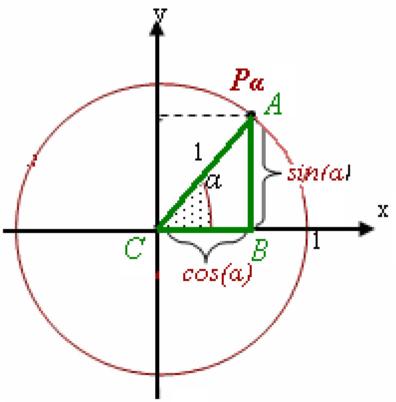
Функция	Аргумент α							
	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Основное тригонометрическое тождество.

Основное тригонометрическое тождество выражается формулой:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

сумма квадратов синуса и косинуса угла равна единице



Обоснование формулы следующее: так как, точка лежит на единичной окружности, следовательно, можно построить прямоугольный треугольник *ABC* с вершиной в точке *Pα*. Два катета этого прямоугольного треугольника равны соответственно *CB=cosα* и *AB=sinα*. Гипотенуза прямоугольного треугольника *CA* равна радиусу *R*, т.е. единице. По теореме Пифагора получим:

$$AB^2 + CB^2 = CA^2$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество позволяет, зная одну тригонометрическую функцию, найти все остальные тригонометрические функции.

Рассмотрим решение задач на использование основного тригонометрического тождества.

Задача 1. Известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ и угол α принадлежит второй четверти $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Найти значения тригонометрических функций: *cosα, tgα, ctgα.*

Решение: Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{9}{16}+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos^2\alpha=1-\frac{9}{16}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{16}{16}-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{7}{16}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Т.к. угол лежит во второй четверти, следовательно, косинус имеет знак минус.

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}:\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}=-\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Задача 2. Известно, что *tgα*=2 и угол α принадлежит первой четверти $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Найти значения тригонометрических функций: *cosα, sinα, ctgα.*

Решение:

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha=2\cos\alpha$$

Подставим в основное тригонометрическое тождество выражение для синуса.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$(2\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$5\cos^2\alpha=1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$, т.к. угол лежит в первой четверти, то косинус будет положительным.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

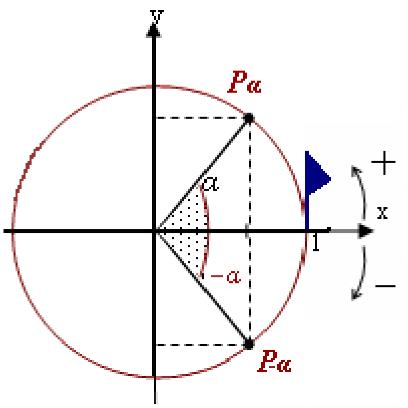
$$\sin\alpha = 2\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2}$$

Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции для отрицательного угла

cos(-α)=cosα
sin(-α)=-sinα
tg(-α)=-tgα
ctg(-α)=-ctgα



Напомним, что положительные углы откладываются против хода часовой стрелки, а отрицательные углы - по ходу часовой стрелки. Точкам Pα и P-α соответствуют противоположные углы, при этом, абсциссы x этих точек совпадают, а ординаты y отличаются только знаком. Следовательно, косинусы противоположных углов совпадают, а синусы отличаются только знаком: *cos(-α)=cosα* , *sin(-α)=-sinα*

С учетом того, что знаем, найдем тангенс и котангенс для отрицательного угла.

$$tg(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-ctg\alpha$$

Задача .Используя табличные значения и формулы для отрицательных углов, вычислить:

$$\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\sin 300^0-tg330^0\cdot ctg\frac{3\pi}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})-(-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot 0=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4}+0=\frac{3}{4}$$

$$\sin(-45^0)\cdot tg(-30^0)=-\sin 45^0\cdot(-tg30^0)=\sin 45^0\cdot tg30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{3})+ctg(-\frac{3\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{3})-ctg(\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$$

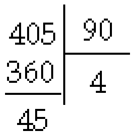
Формула приведения

Формулы приведения позволяют при нахождении значений тригонометрических функций перейти от углов вида:

$\alpha\pm 90^{\circ}k$ или $\alpha\pm\frac{\pi}{2}\cdot k$, где k- любое целое число,

к острому углу α. При этом, если k – число четное, то название функции **не меняется**; если k – число нечетное, то название функции **меняется на кофункцию**. Знак перед приведенной функцией ставится такой, каков знак приводимой (исходной) функции в соответствующей четверти, если считать угол α острым.

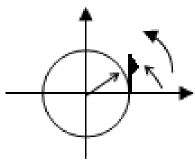
Задача 1. Разложить угол на 90º и воспользоваться формулой приведения



А) $\cos 405^0=\cos(90^0\cdot 4+45^0)=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$

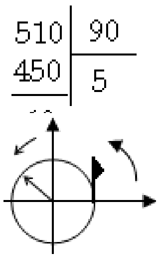
k=4, сл-но, функция не меняет свое название

$90^0\cdot 4+45^0$ - делаем 4 оборота в 90º и поворот на 45º .



Угол лежит в I четверти, в которой косинус имеет знак плюс.

В) $tg510^0 = tg(90^0 \cdot 5 + 60^0) = -ctg60^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



k=5, сл-но, функция меняет свое название

$90^0 \cdot 5 + 60^0$ - делаем 5 оборотов в 90º и поворот на 60º .
Угол лежит во II четверти, в которой тангенс имеет знак минус.

Задача 2. Вычислить

$\cos(-945^0) \cdot ctg(-1830^0) + \sin(-720^0)$

Воспользуемся формулами для отрицательных углов

$\cos(-945^0) \cdot ctg(-1830^0) + \sin(-720^0) = \cos945^0 \cdot (-ctg1830^0) - \sin720^0$

Вычислим каждое выражение в отдельности:

$\cos945^0 = \cos(90^0 \cdot 10 + 45^0) = -\cos45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

k=10 , функция не меняет название, угол лежит в III четверти, где косинус имеет знак минус

$ctg1830^0 = ctg(90^0 \cdot 20 + 30^0) = ctg30^0 = \sqrt{3}$

k=20 , функция не меняет название, угол лежит в I четверти, где котангенс имеет знак плюс

$\sin720^0 = \sin(90^0 \cdot 8 + 0) = \sin0^0 = 0$

k=8 , функция не меняет название, угол равен нулю, синус нуля равен нулю

$$\cos945^0 \cdot (-ctg1830^0) - \sin720^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} - 0 = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Тригонометрические функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{1+tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$$

Задача 1. Применить формулы :

A) $\cos(46^o)\cos(14^o)-\sin(46^o)\sin(14^o)=\cos(46^o+14^o)=\cos(60^o)=\frac{1}{2}$

B) $\cos(36^o)\cos(6^o)+\sin(36^o)\sin(6^o)=\cos(36^o-6^o)=\cos(30^o)=\frac{1}{2}$

C) $\sin(40^o)\cos(5^o)+\sin(5^o)\cos(40^o)=\sin(40^o+5^o)=\sin(45^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\sin(40^o)\cos(10^o)-\sin(10^o)\cos(40^o)=\sin(40^o-10^o)=\sin(30^o)=\frac{1}{2}$

Задача 2. Вычислить tg(α+β) и tg(α-β), если известно, tg(α)=-3 tg(β)=$\frac{1}{4}$

Решение: Воспользуемся формулой тангенса суммы

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{-3+\frac{1}{4}}{1-(-3)\cdot\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{12}{4}+\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{11}{4}}{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{11}{4}}{\frac{7}{4}}=$$

$$-\frac{11}{4}:\frac{7}{4}=-\frac{11}{4}\cdot\frac{4}{7}=-\frac{11}{7}$$

Воспользуемся формулой тангенса разности

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{-3-\frac{1}{4}}{1+(-3)\cdot\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{12}{4}-\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{4}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{13}{4}}{\frac{1}{4}}=$$

$$-\frac{13}{4}:\frac{1}{4}=-\frac{13}{4}\cdot\frac{4}{1}=-13$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$
$$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

Задача 1. Применить формулы:

А) $sin38^o=2sin19^o\cdot cos19^o$

$2sin(24^o)cos(24^o)=sin(2\cdot 24^o)=sin(48^o)$

В) $\cos 7\pi=\cos^2\frac{7\pi}{2}-\sin^2\frac{7\pi}{2}$

$cos^2(12^o)-sin^2(12^o)=cos(2\cdot 12^o)=cos(24^o)$

Задача 2. А) вычислить cos(2α), если известно, что $\cos(\alpha)=-\frac{1}{3}$,

Решение:

$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\sin^2(\alpha)=\frac{1}{9}-\sin^2(\alpha)$

Необходимо найти sin(α)-?.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$\mathbf{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1}$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\frac{1}{9}+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\sin^2(\alpha)=1-\frac{1}{9}=\frac{9}{9}-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\sin^2(\alpha)=\frac{8}{9}$$

Подставим в формулу для двойного аргумента:

$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha)=\frac{1}{9}-\sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha)=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-\frac{7}{9}$

$\cos(2\alpha)=-\frac{7}{9}$

В) Вычислить sin(2α), если известно, что $\cos(\alpha)=\frac{2}{7}$, $0^o<\alpha<90^o$

Решение: $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

В формуле неизвестен множитель sin(α) - ?.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\frac{4}{49}+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\sin^2(\alpha)=1-\frac{4}{49}=\frac{49}{49}-\frac{4}{49}=\frac{45}{49}$$

$$\sin(\alpha)=\pm\sqrt{\frac{45}{49}}=\pm\frac{\sqrt{5\cdot 9}}{\sqrt{49}}=\pm\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Угол α принадлежит I четверти $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, следовательно, $\sin(\alpha)>0$:

$$\sin(\alpha)=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Подставим в формулу двойного аргумента.

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=2\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{12\sqrt{5}}{49}$$

Задача 3. Вычислить tg(2α), если известно, что $tg(\alpha)=-\frac{2}{7}$

Решение:

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot(-\frac{2}{7})}{1-(-\frac{2}{7})^2}=\frac{-\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{49}}=\frac{-\frac{4}{7}}{\frac{49}{49}-\frac{4}{49}}=\frac{-\frac{4}{7}}{\frac{45}{49}}=-\frac{4}{7}:\frac{45}{49}=$$

$$-\frac{4}{7}\cdot\frac{49}{45}=-\frac{4}{1}\cdot\frac{7}{45}=-\frac{28}{45}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Упростить: cos11◦cos19◦-sin11◦cos19◦
Sin14◦cos31◦+sin31◦cos14◦
2cos25◦ Sin25◦
$\cos^2 31◦-\sin^2 31◦$

2. Вычислить tg(α+β), tg(α-β), если известно, tg(α)=5 tg(β)= $\frac{1}{4}$

3. Вычислить cos(2α), если известно, что sin(α)= $-\frac{1}{4}$

4. Вычислить sin(2α), если известно, что cos(α)= $\frac{1}{3}$, 0º<α<90º

5. Вычислить ctg(2α), если известно, что ctg(α)=3

6. α – острый угол, определить в какой четверти лежит угол β и найти знаки тригонометрических функций для угла β

A) β=90·8- α

B) β= $\frac{13\pi}{2}$ + α

C) β=630- α

D) β=9000 + α

7. Используя табличные значения и формулы для отрицательных углов вычислить:

$A)\sin\frac{5\pi}{3}\cdot tg45^0$ $B)ctg\frac{7\pi}{4}+\cos120^0$

$C)\cos(-30^0)\cdot tg(-60^0)$ $D)\sin(-\frac{5\pi}{3})-tg(-\frac{11\pi}{6})$

8. Известно, что sin(α)= $\frac{3}{7}$ и угол α принадлежит второй четверти $\frac{\pi}{2}$≤α≤π. Найти значения тригонометрических функций: cos(α), tg(α), ctg(α).

9. Известно, что tg(α)= $\frac{1}{3}$ и угол α принадлежит первой четверти 0≤α≤ $\frac{\pi}{2}$. Найти значения тригонометрических функций: sin(α), cos(α), ctg(α).

10. Воспользоваться формулой приведения

A) $\sin(90^0 \cdot 9 - 40^0)$ B) $\cos(90^0 \cdot 8 + 20^0)$

C) $tg(90^0 \cdot 5 - 10^0)$ D) $ctg(90^0 \cdot 7 + 70^0)$

11. Разложить угол на 90º и воспользоваться формулой приведения

A) $\cos 675^0$ B) $\sin 1020^0$ C) $tg 690^0$ D) $ctg 585^0$

12. Вычислить

A) $\sin(-1035^0) \cdot tg(-750^0)$ B) $\cos(-930^0) - tg(-390^0)$

13. С какой осью связано значение синуса?

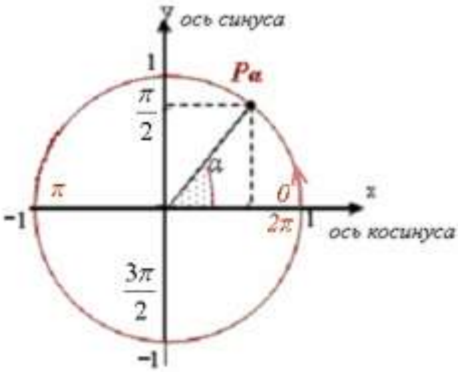
14. Назовите угол, для которого косинус и синус имеют знак минус.

15. Назовите отрицательный угол, на который следует повернуться, чтобы попасть в I четверть?

16. Подберите значения синуса и косинуса некоторого угла так, чтобы они удовлетворяли основному тригонометрическому тождеству.

Свойства и графики тригонометрических функций

Рассмотрим тригонометрические функции, для которых в качестве аргумента *x* будет выступать угол поворота α.



Функция синус - y=sin(x)

Синус угла – это ордината *y* точки единичной окружности. Рассмотрим на единичной окружности полный оборот от 0 до 2π.
Приведем в таблице базовые точки.

x	*0*	$\frac{\pi}{2}$	*π*	$\frac{3\pi}{2}$	*2π*
sin(x)	*0*	*1*	*0*	*-1*	*-1*

От о до $\frac{\pi}{2}$ синус возрастает по единичной окружности.

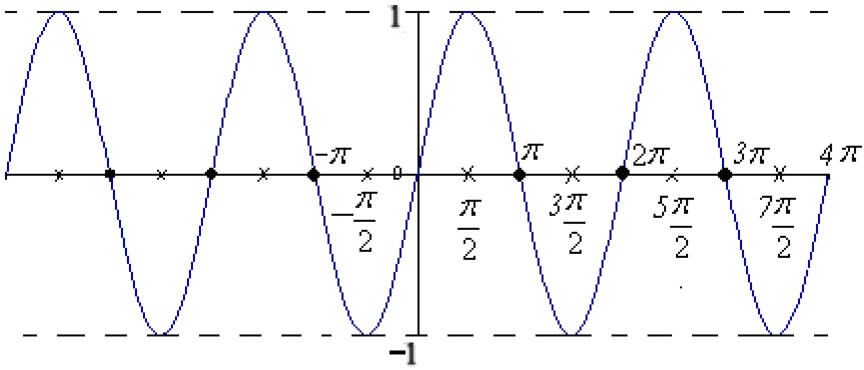
От $\frac{\pi}{2}$ до π синус убывает по единичной окружности

От π до $\frac{3\pi}{2}$ синус убывает по единичной окружности

От $\frac{3\pi}{2}$ до 2π синус возрастает по единичной окружности

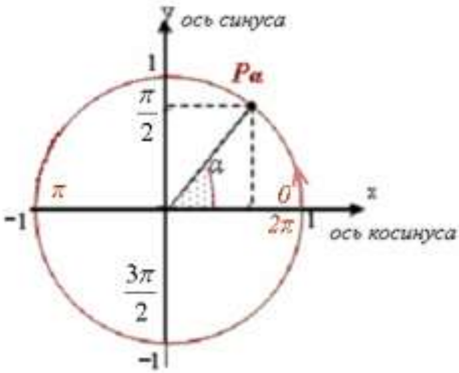
Такое же поведение синуса будет на интервале от 2π до 4π, от 4π до 6π и т .д.

Для отрицательных *x* значения синуса будут противоположными по знаку.



Свойства функции:

1. Область определения Df : *x*- любое число.
   Множество значений Ef: *y* принимает значения от -*1* до *1*
2. Немонотонная функция.
3. Ограничена снизу и сверху.
4. Нечетная функция, график симметричен относительно начало координат, sin(-*x*)=-sin(*x*)
5. Периодическая функция с периодом T=2π=360º.
6. Непрерывная функция.



Функция косинус - y=cos(x)

Косинус – это абсцисса *x* точки единичной окружности.
Рассмотрим на единичной окружности полный оборот от 0 до 2π.
Приведем в таблице базовые точки.

x	*0*	$\frac{\pi}{2}$	*π*	$\frac{3\pi}{2}$	*2π*
sin(x)	*1*	*0*	*-1*	*0*	*1*

От о до $\frac{\pi}{2}$ косинус убывает по единичной окружности.

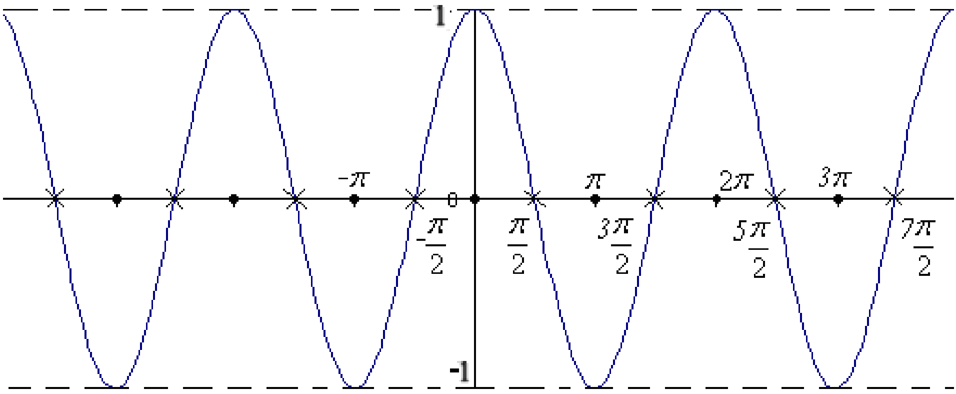
От $\frac{\pi}{2}$ до π косинус убывает по единичной окружности

От π до $\frac{3\pi}{2}$ косинус возрастает по единичной окружности

От $\frac{3\pi}{2}$ до 2π косинус возрастает по единичной окружности

Такое же поведение косинуса будет на интервале от 2π до 4π, от 4π до 6π и т .д.

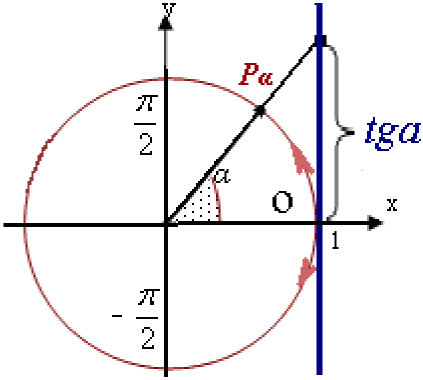
Для отрицательных *x* значения косинуса будут такими же.



Свойства функции:

1. Область определения Df : *x*- любое число.
   Множество значений Ef: *y* принимает значения от -*1* до *1*
2. Немонотонная функция.
3. Ограничена снизу и сверху.
4. Четная функция, график симметричен относительно оси OX:
   $\cos(-x)=\cos(x)$
5. Периодическая функция с периодом T=2π=360º.
6. Непрерывная функция.

Функция тангенс y=tg(x)



Тангенс угла – это ордината *y* точки, которая лежит на линии тангенса и соответствует углу.

Рассмотрим на единичной окружности поворот от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Приведем в таблице базовые точки.

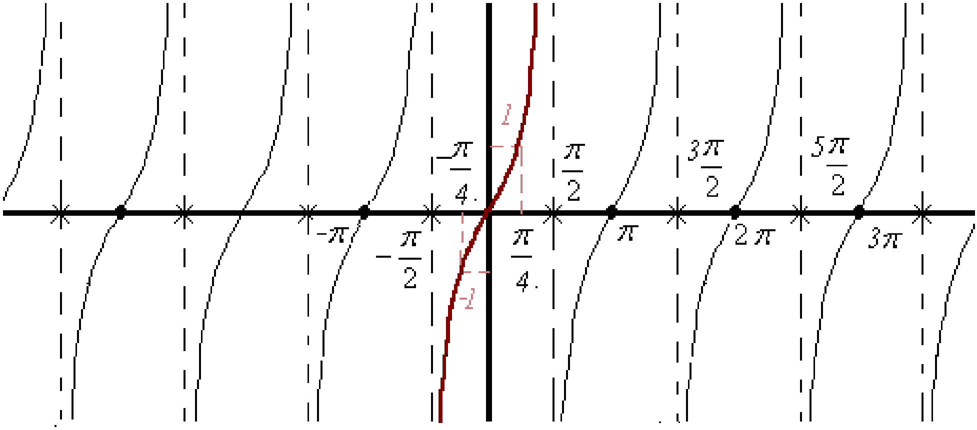
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	*0*	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
sin(x)	-	-1	0	1	-

От $-\frac{\pi}{2}$ до 0 тангенс возрастает по линии тангенса.

От 0 до $\frac{\pi}{2}$ тангенс возрастает по линии тангенса.

В точках $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$ и т.д. тангенс не существует.

Такое же поведение тангенса будет на интервале от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ и т.д.



Свойства функции:

1. Область определения Df : x- любое число, кроме точек вида

$$\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot k \text{, где } k \text{ целое число}$$

Множество значений Ef: y – любое число

2. Возрастающая функция на интервалах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ и т.д.
3. Неограниченная функция.
4. Нечетная функция, график симметричен относительно начало координат : *tg(-x)=-tg(x)*
5. Периодическая функция с периодом $T=\pi=180^o$.
6. Не является непрерывной, имеет точки разрыва

$$\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot k \text{, } k \text{ – целое число.}$$

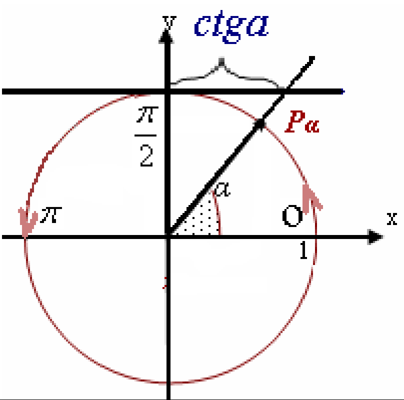
7. Пределы в точках разрыва:

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}-} tg(x) = +\infty$ - предел слева от точки $-\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} tg(x) = -\infty$ - предел справа от точки $-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} tg(x) = +\infty$$ - предел слева от точки $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} tg(x) = -\infty$$ - предел справа от точки $\frac{\pi}{2}$



Функция котангенс y=ctg(x)

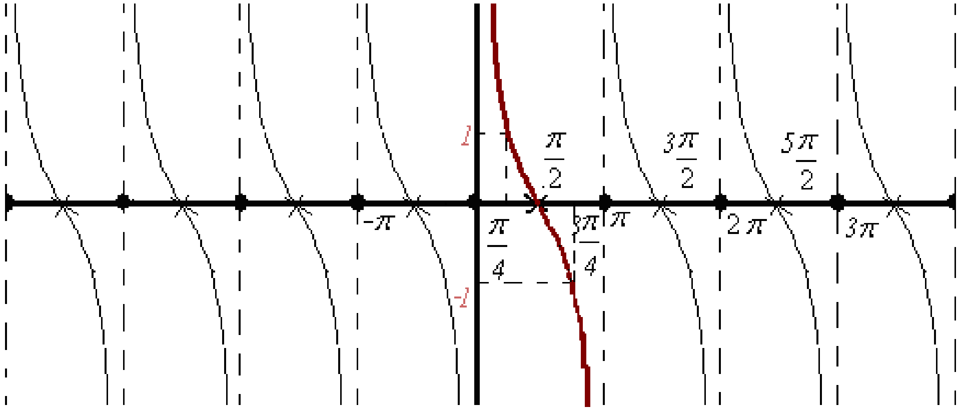
Котангенс угла – это координата *x* точки, которая лежит на линии котангенса и соответствует углу.

Рассмотрим на единичной окружности поворот от 0 до π.
Приведем в таблице базовые точки.

x	*0*	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
sin(x)	*-*	*1*	*0*	*-1*	*-*

От 0 до $\frac{\pi}{2}$ котангенс убывает по линии котангенса.

От $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$ котангенс убывает по линии котангенса.
В точках 0±, ± π, ±2π и т.д. котангенс не существует.
Такое же поведение котангенса будет на интервале от π до 2π , от 2π до 4π и т.д.



Свойства функции:

1. Область определения Df : *x*- любое число, кроме точек вида

$\pi \cdot k$, где *k* целое число

Множество значений Ef: *y* – любое число

2. Убывающая функция на интервалах от 0 до π, от π до 2π, от 2π до 4π и т.д.
3. Неограниченная функция.
4. Нечетная функция, график симметричен относительно начало координат : *ctg(-x)=-ctg(x)*
5. Периодическая функция с периодом T=π=180º.
6. Не является непрерывной, имеет точки разрыва

$\pi \cdot k$, где *k* – целое число.

7. Пределы в точках разрыва:

$\lim\limits_{x \to 0-} ctg(x) = -\infty$ - предел слева от точки 0

$\lim\limits_{x \to 0+} ctg(x) = +\infty$ - предел справа от точки 0

$\lim\limits_{x \to \pi-} ctg(x) = -\infty$ - предел слева от точки π

$\lim\limits_{x \to \pi+} ctg(x) = +\infty$ - предел справа от точки π

Задачи для самостоятельного решения

1. Выбрав в качестве π четыре клетки, построить график $y=sin(x)$

2. Выбрав в качестве π шесть клеток, построить график $y=cos(x)$

3. Выбрав в качестве π две клетки, построить график $y=tg(x)$

4. Выбрав в качестве π три клетки, построить график $y=ctg(x)$

Преобразования графиков тригонометрических функций

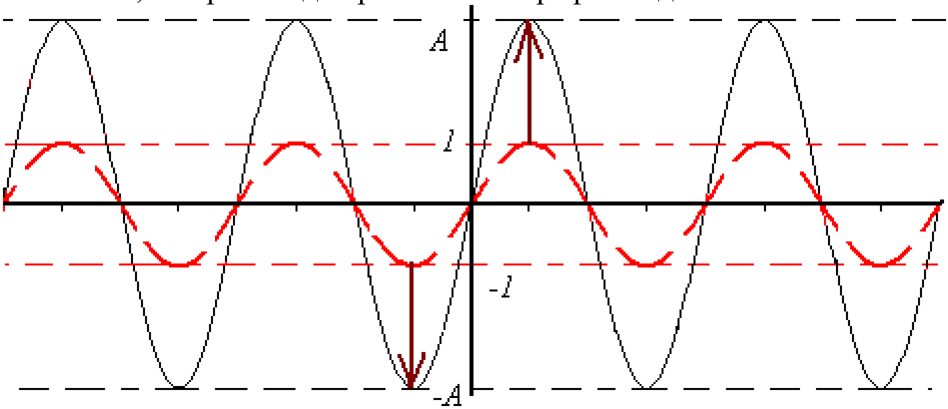
Для графиков тригонометрических функций рассмотрим следующие преобразования.

1. *Растяжение (сжатие) вдоль оси* ***OY*:**

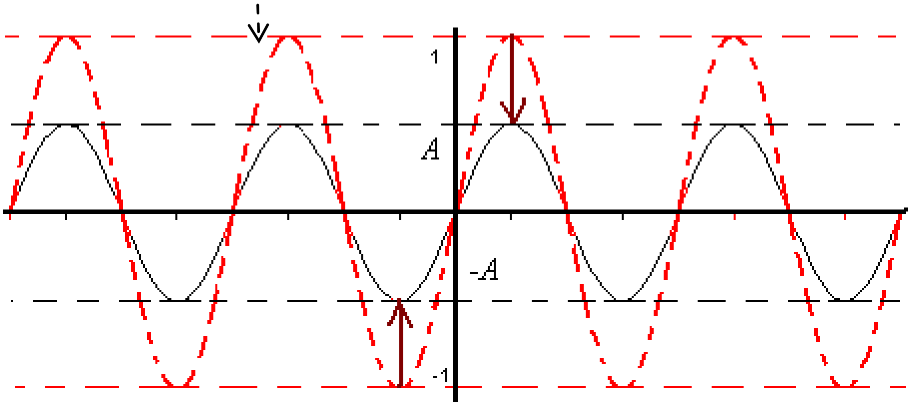
$$y=A\cdot f(x),$$

$$A>0 \text{ - амплитуда.}$$

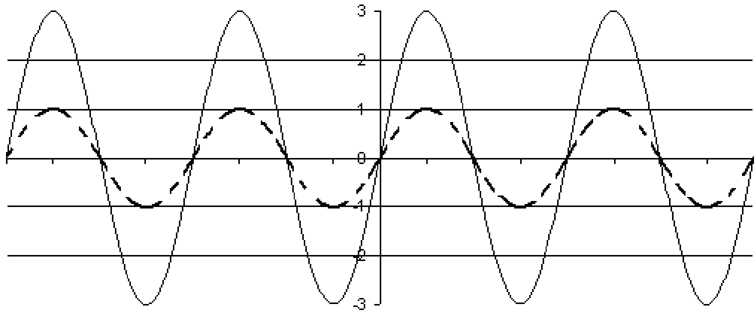
График функции $y=A\cdot f(x)$ получается из графика $y=f(x)$ путем растяжения (сжатия) относительно оси *OY*.
Для функций $y= A\cdot sin(x)$ и $y= A\cdot cos(x)$ меняется множество значений функции [-1;1] на интервал [-*A;A*]
Если A>1, то происходит растяжение графика вдоль оси *OY*.



Если 0<*A*<*1*, то происходит сжатие графика вдоль оси *OY*.



Пример. *y=3sin(x)*



2. *Растяжение (сжатие) вдоль оси OX***:**

y=f(ωx),

где *ω*>0 – частота

График функции *y=f(ωx)* получается из графика *y=f(x)* путем сжатия или растяжение относительно оси *OX*.

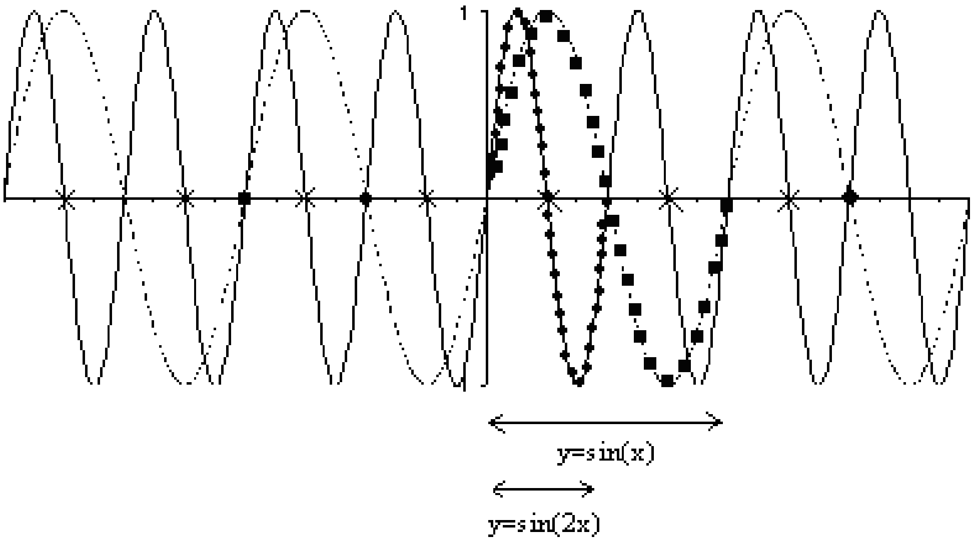
Для тригонометрических функций меняется период функции:

Старый период - $T=2\pi$

Новый период - $T' = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Если ω>1, то период уменьшается, график «быстрее» пробегает свои значения

На чертеже представлен график функции *y=sin(2x)*.



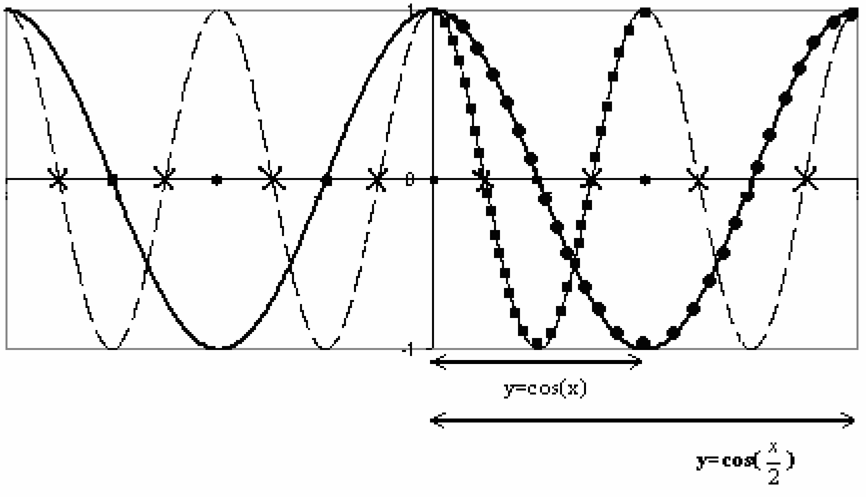
ω=2$T^{'} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ - новый период функции, т.о. период уменьшился в 2 раза.

Если ω<1, то период увеличивается, график «медленнее» пробегает свои значения.

На чертеже представлен график функции $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

$\omega = \dfrac{1}{2}$

$T^{'} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{1}\pi = 4\pi$ - новый период функции, т.о. период увеличился в два раза с 2π до 4π.



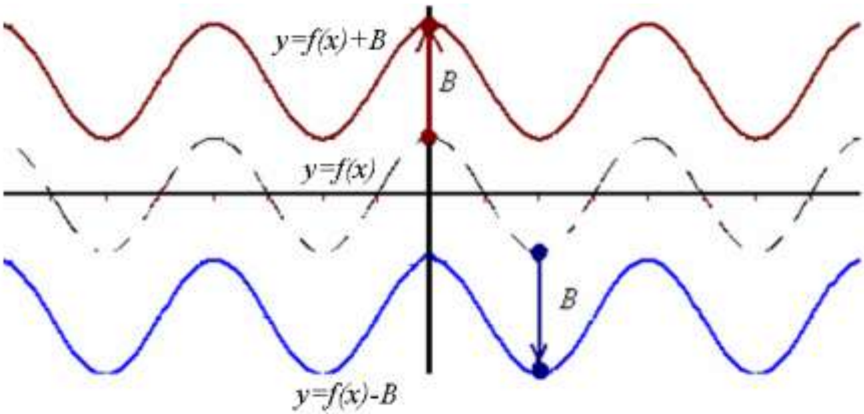
3. *Сдвиг вдоль оси OY*:

y=f(x)±B,

где *B>0*

График функции *y=f(x)+B* можно получить из графика *y=f(x)* путем сдвига на *B* единиц вверх.

График функции *y=f(x)-B* можно получить из графика *y=f(x)* путем сдвига на *B* единиц вниз.



4. *Сдвиг вдоль оси OX*:

y=f(x±b),
где b>0

График функции *y=f(x-b)* можно получить из графика *y=f(x)* путем сдвига на *b* единиц вправо.

.

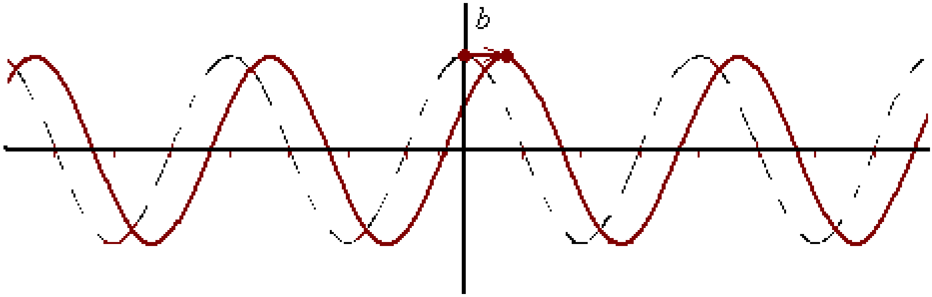
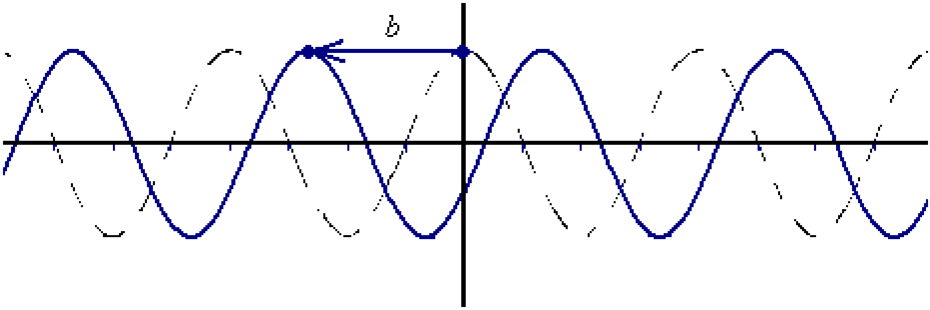


График функции *y=f(x+b)* можно получить из графика *y=f(x)* путем сдвига на *b* единиц влево



Задачи для самостоятельного решения

1. Построить график *y=0,5·sin(x)*
2. Построить график *y=cos(3x)*
3. Построить график *y=tg(x)+2*
4. Построить график $y=ctg(x-\frac{\pi}{3})$

Обратные тригонометрические функции

Известны следующие тригонометрические функции:

$$y=\sin(x),\ y=\cos(x), y=tg(x), y=ctg(x)$$

На интервалах, где тригонометрические функции монотонно возрастают или монотонно убывают, тригонометрические функции имеют себе обратные функции.

Арксинус (arcsin) числа – это угол , синус которого равен этому числу.

Пример: известно, что $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, тогда $\arcsin(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$

Арксинус – это обратная синусу функция, которая определена на интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

Арккосинус (arccos) числа – это угол , косинус которого равен этому числу.

Пример: известно, что $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{6}$

Арккосинус – это обратная косинусу функция, которая определена на интервале $(0;\pi)$

Арктангенс (arctg) числа – это угол , тангенс которого равен этому числу.

Пример: известно, что $tg(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$

Арктангенс – это обратная тангенсу функция, которая определена на интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

Арккотангенс (arcctg) числа – это угол , котангенс которого равен этому числу.

Пример: известно, что $ctg(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$, тогда $arcctg(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$

Арккотангенс – это обратная котангенсу функция, которая определена на интервале $(0;\pi)$

Обратные тригонометрические функции используются для решения тригонометрических уравнений.
Для нахождения значений обратных тригонометрических функций можно использовать табличные значения тригонометрических функций:

x	$-\frac{\pi}{2}$=-90°	$-\frac{\pi}{3}$=-60°	$-\frac{\pi}{4}$=-45°	$-\frac{\pi}{6}$=-30°	0	$\frac{\pi}{6}$=30°	$\frac{\pi}{4}$=45°	$\frac{\pi}{3}$=60°	$\frac{\pi}{2}$=90°
Sin(x)	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{\pi}{6}$=30°	$\frac{\pi}{4}$=45°	$\frac{\pi}{3}$=60°	$\frac{\pi}{2}$=90°	$\frac{2\pi}{3}$=120°	$\frac{3\pi}{4}$=135°	$\frac{5\pi}{6}$=150°	π=180°
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

x	$-\frac{\pi}{2}$=-90°	$-\frac{\pi}{3}$=-60°	$-\frac{\pi}{4}$=-45°	$-\frac{\pi}{6}$=-30°	0	$\frac{\pi}{6}$=30°	$\frac{\pi}{4}$=45°	$\frac{\pi}{3}$=60°	$\frac{\pi}{2}$=90°
tg(x)	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

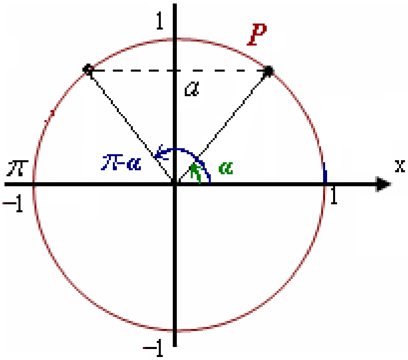
x	0	$\frac{\pi}{6}$=30°	$\frac{\pi}{4}$=45°	$\frac{\pi}{3}$=60°	$\frac{\pi}{2}$=90°	$\frac{2\pi}{3}$=120°	$\frac{3\pi}{4}$=135°	$\frac{5\pi}{6}$=150°	π=180°
ctg(x)	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

К простейшим тригонометрическим уравнениям относят уравнения вида:

$sin(x)=a$, где a число от -1 до 1
$cos(x)=a$, где a число от -1 до 1
$tg(x)=a$, где a любое число
$ctg(x)=a$, где a любое число

Примеры: $sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos(x)=0$; $tg(x)=-1$; $ctg(x)=3$

Дадим обоснование формулам, которые используются при решении тригонометрических уравнений.



1. **$sin(x)=a$**, где a число от -1 до 1

$x=(-1)^k\cdot arcsin(a)+\pi k$, $k \in Z$

Согласно уравнению нам известно значение синуса, число a, которое можно отложить по оси OY.
Требуется найти углы, которые будут удовлетворять уравнению, т.к. функция синуса периодическая, следовательно, углов будет бесконечное множество.
Первый угол - α
Второй угол - π-α
Для того чтобы получить следующую пару углов, необходимо прибавить период 2π: α+2π и π-α+2π=- α+3π= 3π- α.
Прибавляя каждый раз период 2π, будем получать следующие углы: $\alpha+2\pi k$ и $\pi-\alpha+2\pi k$, где k целое число.
Проверим формулу $x=(-1)^k\cdot arcsin(a)+\pi k$ для различных $k \in Z$

$k=0$ - $x=(-1)^0\cdot arcsin(a)+\pi\cdot 0= arcsin(a)=\alpha$

$k=1$ - $x=(-1)^1\cdot arcsin(a)+\pi\cdot 1=- arcsin(a)+ \pi=-\alpha+\pi=\pi- \alpha$

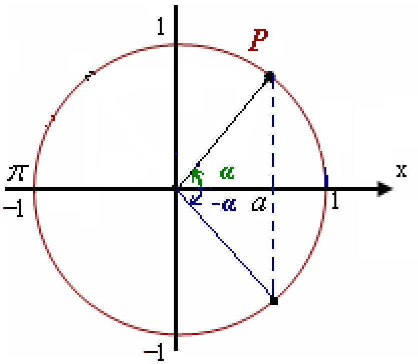
$k=2$ - $x=(-1)^2\cdot arcsin(a)+\pi\cdot 2= arcsin(a)+ \pi\cdot 2=\alpha+2\pi$

$k=3$ - $x=(-1)^3\cdot arcsin(a)+\pi\cdot 3=- arcsin(a)+ \pi\cdot 3=-\alpha+3\pi=3\pi- \alpha$

Обобщая получим:

Если $k=2n$ – четное число, то $x=(-1)^k \cdot \arcsin(a)+\pi \cdot k= \arcsin(a)+\pi \cdot k=\alpha+2\pi \cdot n$, где n – любое целое число.
Если $k=2n+1$ – нечетное число, то $x=(-1)^k \cdot \arcsin(a)+\pi \cdot k= -\arcsin(a)+\pi \cdot (2n+1)=-\alpha+2\pi \cdot n+\pi= \pi-\alpha+2\pi n$, где n – любое целое число
Т.о. рассуждения по чертежу и предлагаемая формула дают одно и тоже множество решений.

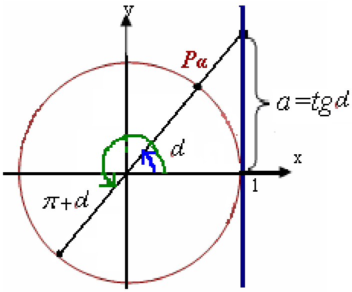
2. $\cos(x)=a$, где a число от -1 до 1
$x=\pm\arccos(a)+2\pi k$, $k \in Z$



Согласно уравнению нам известно значение косинуса, число a, которое можно отложить по оси OX.
Требуется найти углы, которые будут удовлетворять уравнению, т.к. функция косинуса периодическая, следовательно, углов будет бесконечное множество.
Первый угол - α
Второй угол - $-\alpha$
Для того чтобы получить следующую пару углов, необходимо прибавить период 2π: $\alpha+2\pi$ и $-\alpha+2\pi$.
Прибавляя каждый раз период 2π, будем получать следующие углы: $\alpha+2\pi k$ и $-\alpha +2\pi k$, где k целое число.
Проверим формулу $x=\pm\arccos(a)+2\pi k$, для различных $k \in Z$
$k=0$ - $x=\pm\cdot\arccos(a)+2\pi\cdot 0= \pm\arccos(a)= \pm\alpha$
$k=1$ - $x=\pm\arccos(a)+2\pi\cdot 1=\pm\arccos(a)+2\pi=\pm\alpha+2\pi$
$k=2$ - $x=\pm\cdot\arccos(a)+2\pi\cdot 2=\pm \arccos(a)+ 4\pi=\pm\alpha+4\pi$
$k=3$ - $x=\pm\cdot\arccos(a)+2\pi\cdot 3=\pm \arccos(a)+ 6\pi=\pm\alpha+6\pi$
Обобщая получим: - $x=\pm\cdot\alpha+2\pi k$
Т.о. рассуждения по чертежу и предлагаемая формула дают одно и тоже множество решений.

3. ***tg(x)=a***, где *a* любое число

$x=arctg(a)+\pi k,\ \ k\in Z$



Согласно уравнению нам известно значение тангенса, число *a*, которое можно отложить по оси тангенса. Требуется найти углы, которые будут соответствовать числу *a*

Первый угол - α

Второй угол - π+α

Т.к. функция тангенса периодическая, следовательно, чтобы получить другие углы, следует прибавить период π:

$x=\alpha+\pi k,\ \ k\in Z$, учитывая, что α – это арктангенс числа *a*, получим формулу: $x=arctg(a)+\pi k,\ \ k\in Z$

4. ***ctg(x)=a*** , где *a* любое число

$x=arcctg(a)+\pi k,\ \ k\in Z$

Дать самостоятельно обоснование формулы, используя линию котангенса.

Решение задач

Задача 1. Решить уравнения:

А) $sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=(-1)^k\cdot arcsin(a)+\pi k,\ \ k\in Z$

$x=(-1)^k\cdot arcsin(\dfrac{\sqrt{3}}{2})+\pi k,\ \ k\in Z$

$x=(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in Z$

B) cos(x)= $\frac{4}{7}$ *a=* $\frac{4}{7}$

x=±arccos($\frac{4}{7}$*)+2πk, k ∈ Z*

C) tg(x)=-1 a=-1

x=arctg(-1)+πk, k ∈ Z

x=-$\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in Z$

D) ctg(x)= $\sqrt{3}$ *a=* $\sqrt{3}$

x=arcctg($\sqrt{3}$*)+πk, k ∈ Z*

x=$\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in Z$

Задача 2. Решить уравнения:

A) sin(7x)=$\frac{1}{2}$

7x=$(-1)^k\cdot\arcsin(\frac{1}{2})+\pi k,\ k \in Z$

7x=$(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in Z$ (x$\frac{1}{7}$)

x=$(-1)^k\cdot\frac{\pi}{7\cdot 6}+\frac{\pi}{7}k,\ k \in Z$

x=$(-1)^k\cdot\frac{\pi}{42}+\frac{\pi}{7}k,\ k \in Z$

B) tg($\frac{x}{3}$)=$\frac{1}{5}$

$\frac{x}{3}$=arctg($\frac{1}{5}$)+πk, k ∈ Z (x3)

x=$3\cdot\mathrm{arctg}(\frac{1}{5})+3\pi\cdot k,\ k \in Z$

C) $\cos(x-\frac{\pi}{7})=\frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{7}=\pm\arccos(\frac{1}{2})+2\pi k,\ \ k\in Z$

$x-\frac{\pi}{7}=\pm\ \arccos(\frac{1}{2})+2\pi k,\ \ k\in Z$

$x-\frac{\pi}{7}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{7}+2\pi k,\ \ k\in Z$

D) $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=-\frac{2}{3}$

$2x-\frac{\pi}{3}=(-1)^{k}\cdot\arcsin(-\frac{2}{3})+\pi k,\ \ k\in Z$

$2x=(-1)^{k}\cdot\arcsin(-\frac{2}{3})+\frac{\pi}{3}+\pi k\quad ({}_{x}\frac{1}{2})$

$x=(-1)^{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot\arcsin(-\frac{2}{3})+\frac{\pi}{2\cdot 3}+\frac{\pi}{2}k,$

$x=(-1)^{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot\arcsin(-\frac{2}{3})+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\ \ k\in Z$

Задачи для самостоятельного решения

Задача. Решить уравнения:

A) $\sin(x)=-\frac{1}{2}$

B) $\cos(x)=\frac{1}{5}$

C) $tg(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

D) $ctg(x)=2$

E) $\sin(4x)=-\frac{2}{7}$

F) $tg(7x)=-1$

G) $\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

H) $ctg(x+\frac{2\pi}{5})=\frac{1}{6}$

I) $\sin(3x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$