Тема №5 «Множества и комплексные числа»

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Даны множества. Изобразить их в виде диаграммы.
A = «множество женщин»
B = «множество мужчин»
C = «множество всех людей»
D = «множество врачей»
M = «множество хирургов»

Задание 2 Человек должен ответить на 6 вопросов (1 вопрос, 2 вопрос, 3 вопрос, 4 вопрос, 5 вопрос, 6 вопрос,). Решить на этом множестве две комбинаторные задачи:
А) Сколько существует вариантов ответов на 6 вопросов, если на каждый вопрос можно ответить ДА, НЕТ, НЕ ЗНАЮ.
В) Сколько существует возможностей выбрать из шести предлагаемых вопросов любые 4.

Задание 3. Изобразить на координатной плоскости числа и указать, к каким числовым множествам они относятся

-2	3,5	e	$\sqrt{25}$	$\frac{\pi}{2}$	-3i	-1+5i

Задание 4. Вычислить
А) $\sqrt{-9}\cdot(2i)^2$ *В)* $3\cdot(2i-1) - 4i\cdot(1+5i)$

Задание 5. Решить квадратное уравнение на множестве комплексных чисел.

$$x^2+6x+10=0$$

Теоретические вопросы

1.Какие существуют операции над множествами и в чем их смысл?
2. Сформулировать правило умножения для комбинаторики.
3. В каких случаях для решения комбинаторных задач используется формула

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

4. Какие числовые множества Вам известны?
5. Что называется комплексным числом и как оно изображается?
6. Что такое мнимая единица?

Множества и комплексные числа

Понятие множества

Множеством называется совокупность объектов той или иной природы, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.
Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

A={1,2,3,4} – множество чисел,
B={а,у,е,ы,о,э,я,и,ю} – множество букв,
C={Δ,□, о} – множество фигур

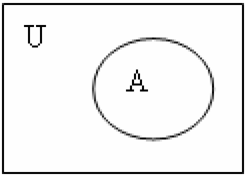
Если элемент ***a*** принадлежит множеству **A**, то записывают ***a*** $\in$ **A**
Если элемент ***a*** не принадлежит множеству **A**, то записывают ***a*** $\notin$ **A**
Для множеств A, B и C будем иметь: **1** $\in$ **A; *о*** $\in$ **B;** ◊ $\notin$ C

Выделим два уникальных множества:
Ø – *пустое множество*, которое не содержит элементов.
U – *универсальное множество*, из его элементов строится исходное множество.
Например, для множества B={а,у,е,ы,о,э,я,и,ю} универсальным множеством может быть множество букв русского алфавита,

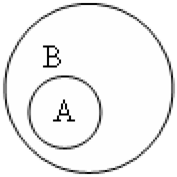
U={а,б,с…я}

Будем на диаграмме универсальное множество изображать

в виде прямоугольника, а обычное множество в виде окружности.



Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то говорят, что множество A – это *подмножество* множества B, т.е. A является частью множества B. В этом случае математически записывают: **A** $\subset$ **B** (A включено в B)



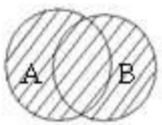
Пример: Для множества C={Δ,□, o} укажем все его подмножества:

{Δ,□, o} ;{Δ,□}; {Δ, o};{□, o};{Δ}; {□} {o} **Ø**

Два множества A и B *равны* (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов. Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Операции над множествами и их свойства

Объединением множеств A и B называется множество A $\cup$ B, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

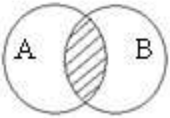


Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A $\cup$ B = {1,2,3,4,5,6}

Свойства: **Ø**$\cup$A=A

U$\cup$A= **U**

Пересечением множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат одновременно двум множествам A и B.

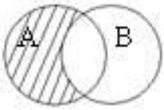


Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то $A \cap B = \{2,4\}$

Свойства: $\varnothing \cap A = \varnothing$

$U \cap A = A$

Разностью множеств A и B называется множество A \ B, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.



Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то $A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{5\}$

Свойства: $A \setminus \varnothing = A$

$A \setminus U = \varnothing$

$A \setminus B \neq B \setminus A$

Правила и формулы комбинаторики

Правило суммы: пусть для решения задачи необходимо выбрать объект A или объект B. Причем, при выборе объекта A можно использовать n-возможностей, а объекта B - m-возможностей. Тогда для решения задачи можно использовать $n+m$ возможностей. Ключевое слово в этом правиле – союз *или.*

Задача: в группе 10 человек, из них 4 юноша и 6 девушек. Сколько существует возможностей выбрать 1 человека из группы?
Если рассуждать по правилу, то выбрать 1 человека – это выбрать A – юношу или B-девушку. Выбрать юношу – 4 возможности, выбрать девушку – 6 возможностей. Возможности складываются, и получаем ответ – 10.

Правило умножения: пусть для решения задачи необходимо последовательно выполнить *n* действий, причем
1-е действие можно выполнить, используя k_1 возможностей,
2-е действие можно выполнить, используя k_2 возможности
….
n-е действие можно выполнить, используя k_n возможностей.
Тогда для решения задачи можно использовать $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$ возможностей. Т.е. если действия выполняются одновременно или последовательно, то возможности перемножаются.

Задача: Сколько существует вариантов, как выпадут три монеты?
Подбросили три монеты, т.е. выполнили три действия:
1 действие – подбросить 1-ю монету - 2 возможности (орел или решка)
2 действие – подбросить 2-ю монету - 2 возможности (орел или решка)
3 действие – подбросить 3-ю монету - 2 возможности (орел или решка)
Согласно правилу умножения, возможности перемножаются **2·2·2=8**

Формулы комбинаторики

Число перестановок из n-различных элементов: $P=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n=n!$
Эта формула применяется в том случае, когда путем перестановки элементов в исходной последовательности, получаем новую последовательность.
Задача: Сколько существует различных способов разложить 36 карт в один ряд?
Исходное множество X={1,2, … 36} – пронумерованные карты. Можно разложить их вначале по порядку, а затем менять расположение карт, перекладывая их. $P=36!$

Число сочетаний из n элементов по k элементов $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Эта формула применяется в том случае, когда из *n* элементов необходимо выбрать ровно *k* элементов, причем, не важно, в какой последовательности выбираются элементы, т.е. какой элемент первый, какой второй и т.д.
Задача: Сколькими способами можно из 7 человек выбрать троих?

Исходное множество X={1,2,3,4,5,6,7}

n=7   k=3 $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$

Числовые множества

Из огромного многообразия всевозможных *множеств* особый интерес представляют так называемые **числовые множества**, то есть, множества, элементами которых являются числа.
Перечислим основные числовые множества:

N= {1,2,3…} – множество ***натуральных*** чисел;

Z={0,±1,±2,±3,…} – множество ***целых*** чисел;

Q – множество ***рациональных*** чисел, т.е. числа, представимые в виде дроби;

Пример: -1; 5; 2,56; $\frac{6}{11}$; -6,278

I – множество ***иррациональных*** *чисел*, т.е. числа, которые нельзя представить в виде дроби;

Пример: $\pi \approx 3{,}14$; $\sqrt{2}$; $e \approx 2{,}7$

R – множество ***действительных*** чисел, которое является объединением всех рассмотренных чисел, включая натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа

R=**N** ∪ **Z** ∪ **Q** ∪ **I**

Кроме действительных чисел существуют и комплексные числа.

Комплексные числа, изображение комплексных чисел

Известно, что квадрат любого числа – число положительное :

$3^2 = (-3)^2 = 9 > 0$

Допустим, что существует такое число i, квадрат которого равен минус единице -1:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

число $\boldsymbol{i}$ – называется ***мнимой единицей***.

*Замечание***:** $\boldsymbol{i^2 = i \cdot i = -1}$

Если существует квадрат числа, то можно найти корень из -1 *:*

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

Задача. Вычислить:

$4i \cdot i = 4 \cdot (-1) = -4$

$3i \cdot 5i = 20 \cdot (-1) = -20$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$\sqrt{-25} = \sqrt{5^2 \cdot i^2} = 5i$

$\sqrt{-25} \cdot \sqrt{-100} = 5i \cdot 10i = -50$

$\sqrt{-4} \cdot (3i) = 2i \cdot 3i = 6 \cdot (-1) = -6$

С мнимым числом связаны *комплексные числа*.

Опр. Число Z, представимое в виде $\boldsymbol{Z = X + Y \cdot i}$ называется ***комплексным числом***, где

X – *действительная* часть числа ,

Y – *мнимая* часть числа,

i - *мнимая единица*

Пример:

$Z_1 = 2 + 3 \cdot i$; $Z_2 = -5 + 7 \cdot i$; $Z_3 = -4 - 9 \cdot i$; $Z_4 = 0 + 3 \cdot i = 3 \cdot i$; $Z_5 = 6 + 0 \cdot i = 6$

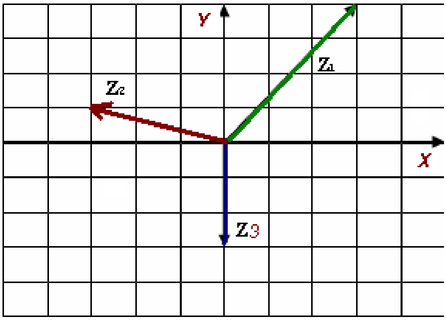
Комплексное число можно изобразить на координатной плоскости, причем действительная часть числа X откладывается по оси OX, а мнимая часть числа Y откладывается по оси OY.

Пример :

$Z_1=3+4i$ X=3, Y=4 ;

$Z_2=-3+i$ X=-3, Y=1 ;

$Z_3=-3i$ X=0, Y=-3



Арифметические операции над комплексными числами

Сумма (разность) чисел – при сложении и вычитании двух комплексных чисел их действительные и мнимые части складываются или вычитаются.

$Z_1+Z_2=-3+2i+5-3i=(-3+5)+(2i-3i)=2-i$;

$Z_1{}^{-}Z_2=-3+2i-(5-3i)=-3+2i-5+3i=-8+5i$

Умножение или деление комплексного числа на обычное число - при умножении или делении комплексного числа на произвольное число его мнимые и действительные части умножаются или делятся на это число

$2\cdot(-3+2i)=2\cdot(-3)+2\cdot 2i=-6+4i$;

$$\frac{3-4i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{4}{2}i=\frac{3}{2}-2i$$

Произведение комплексных чисел - при перемножении двух комплексных чисел необходимо раскрыть скобки, привести подобные члены и учесть тот факт, что $i^2 = -1$

(-3+2i) · (5-3i)=(-3) ·5+2i·5-3·(-3i)+2i·(-3i)=-15+10i+9i-6i^2=

15+19i-6·(-1)=-15+19i+6=-9+19i

Опр. Два комплексных числа $Z = X + Y \cdot i$ и $\overline{Z} = X - Y \cdot i$ называются *сопряженными*, если эти числа отличаются только знаком коэффициента при i.

$Z = 2 + 3 \cdot i$

$\overline{Z} = 2 - 3i$

Деление комплексных чисел - при делении числитель и знаменатель дроби необходимо умножить на число, сопряженное знаменателю.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{-3+2i}{5-3i} = \frac{(-3+2i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{-15+10i-9i+6i^2}{5^2-(3i)^2} = \frac{-15+10i-9i+6\cdot(-1)}{25-(9\cdot i^2)}$$

$$= \frac{-15+10i-9i-6}{25-9\cdot(-1)} = \frac{-21+i}{25+9} = \frac{-21+i}{34} = \frac{-21}{34} + \frac{1}{34}i$$

Решение квадратного уравнения на множестве комплексных чисел

Задача. Решить квадратное уравнение

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

Решение:

Коэффициенты уравнения:

a=1 b=2 c=2

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot i = 2i$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 2i}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2} + \frac{2}{2} i = -1 + i$$

$$x_2 = \frac{-2}{2} - \frac{2}{2} i = -1 - i$$

Ответ: *-1+i; -1-i*