Тема №6 «Теория вероятностей и математическая статистика»

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Из цифр 5, 4, 2, 7 записывают трехзначное число. Выписать все возможные числа, которые можно получить. Назвать для данного опыта достоверное и невозможное событие. Найти вероятность случайного события: A= «число больше 300»

Задание 2. Вероятность того, что завтра будет дождь равна 0,3. Вероятность того, что завтра будет снег равна 0,8. Найти вероятности следующих событий:
1)A= «завтра не будет снега»
2)B= «завтра будет снег с дождем»
3)C= «завтра будет снег или дождь»
4) D= « в течении трех дней будет идти снег»

Задание 3. Дан закон распределения дискретной случайной величины X. Построить многоугольник распределения X и найти ее характеристики: математическое ожидание M(X), математическое ожидание квадрата $M(X^2)$, дисперсию D(X), стандартное отклонение σ(X).

X	2	4	10
p	0,5	?	0,1

Задание 4. Дана выборка X: *3 1 3 5 3 3* построить для нее вариационный ряд и найти характеристики: объем выборки , моду, медиану, размах вариации, среднее значение выборки.

Теоретические вопросы

1. Чему равна вероятность случайного события?
2. Что называется достоверным событием и невозможным событием?
3. Как найти вероятность противоположного события?
4. Чему равна вероятность того, что два события произойдут вместе?
5. Чему равна вероятность того, что произойдет хотя бы одно из событий?

6. Как найти для дискретной случайной величины математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение?
7. Как построить вариационный ряд и найти моду, медиану, размах вариации, среднее значение выборки?

Теория вероятностей и математическая статистика

Случайный опыт, случайное событие, классическое определение вероятности

Случайным опытом будем называть опыт, который можно повторить бесконечное число раз при одних и тех же условиях, причем заранее нельзя предугадать исход опыта.
Примеры: подбрасывание монеты; подбрасывание игрального кубика; достать 1 карту из колоды в 36 карт; стрельба по мишени.

Случайное событие – это событие, которое может произойти в результате случайного опыта.

Случайный опыт	Случайные события
подбрасывание монеты	A= «выпал орел» B= «выпала решка»
подбрасывание игрального кубика	A= «выпало 6 очков» B= «выпало четное число очков»
достать 1 карту из колоды в 36 карт	A= «достать туза B= «достать карту - крести» C= «достать красную масть»

Виды случайных событий:

Достоверное событие U – это событие, которое наступает всякий раз в результате случайного опыта. **Пример:** при подбрасывании игрального кубика всякий раз выпадает не более 6 очков, следовательно, U= «выпало не более 6 очков» - достоверное событие для данного опыта

Невозможное событие F – это событие, которое никогда не наступает в результате случайного опыта. **Пример:** при подбрасывании игрального кубика никогда не выпадает более 6 очков, следовательно, F= «выпало более 6 очков» - невозможное событие для данного опыта

События А и В называются *совместимыми*, если они могут происходить вместе. **Пример:** когда мы достаем 1 карту из 36, то мы может достать карту, которая будет красной масти и дамой одновременно, следовательно, А= «карта красной масти» и В= «карта - дама» - совместимые события.

События А и В называются *несовместимыми*, если они никогда не происходят вместе. **Пример:** Когда мы достаем 1 карту из 36, то мы никогда не сможет достать карту, которая будет красной масти и пиковой дамой одновременно, т.е. эти события несовместимые.

События А и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если всякий раз, когда одно из них не наступает, то обязательно наступает второе событие, и наоборот.
Пример: Когда мы достаем 1 карту из 36, то события А= «карта красной масти» и $\overline{A}$ =«карта черной масти» - противоположные.

Событие А *благоприятствует* событию В, если всякий раз, когда наступает событие А, то наступает и событие В. **Пример:** Когда мы достаем пиковую даму, то можно однозначно утверждать, что достали карту черной масти. Следовательно, событие А= «карта – пиковая дама» благоприятствует событию В= «карта черной масти».

События А и В называются *равновозможными*, если они имеют одинаковые шансы на успех. **Пример:** когда мы подбрасываем монету, то шансы, что выпадет орел или решка, совпадают, следовательно, А= «выпал орел» и В= «выпала решка» - равновозможные события.

Классическое определение вероятности

Пусть в результате опыта может произойти одно из ***n*** равновозможных, несовместимых событий. Наступлению случайного события А благоприятствует ***k*** равновозможных, несовместимых события.

Опр. *Вероятностью случайного события* А будем называть число ***p***, которое равно отношению ***k*** - количества исходов, которые благоприятствуют наступлению события А, к общему числу исходов опыта ***n***:

$$p = \frac{k}{n}$$

Свойства вероятности:

1.Вероятность достоверного события равна единице: p(U)=1

2.Вероятность невозможного события равна нулю: p(F)=0

3.Вероятность случайного события может принимать любое значение от 0 до 1, т.е. $0 \le p \le 1$

4.Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единицы:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Задача 1. **Опыт :** подбросили игральный кубик. Назвать для опыта достоверное событие, невозможное событие и два противоположных события. Найти вероятность, что выпадет более 4 очков.

Решение: U= « выпадет не более 6 очков»

F = «выпадет более 6»

А= «выпадет четное число» $\overline{A}$ = «выпадет нечетное число»

n=6 - всего исходов, т.к. всего шесть исходов по количеству очков {1; 2; 3; 4: 5:6}

k=2 – количество благоприятствующие исходы, т.к. только в двух случаях выпадает более 4 очков {5;6}

$$p(A)=\frac{k}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Задача 2. Вероятность сдать экзамен по математике p=0,7. Найти вероятность того, что студент экзамен не сдаст.

Решение: A = «студент экзамен сдал» $\overline{A}$ = «студент экзамен не сдал»
Имеем дело с противоположными событиями.

p(A)+ $p(\overline{A})$=1   0,7+ $p(\overline{A})$=1 $p(\overline{A})$=1-0,7=0,3

Задача 3. Дан опыт: у случайного человека спросили, на какую цифру оканчивается его телефонный номер. Для случайных событий A, B, C найти вероятности и определить :
- будут ли события A и C противоположными
- будут ли события A и B совместимыми
- будет ли событие B благоприятствовать событию A
- будут ли события A и C равновозможными.

A= «номер оканчивается на цифру 2»
B= «номер оканчивается на четную цифру»
C= «номер оканчивается на цифру 5»

Решение: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – все варианты ответов
n=10 - всего исходов
p(A)=1/10 p(B)=5/10=1/2 (цифры 0,2,4,6,8 – четные) p(C)=1/10
A и C - не являются противоположными, т.к. если номер на оканчивается на цифру 2, то это не обязательно, что он должен оканчиваться на цифру 5, и наоборот.
A и B – совместимые события, т.к. 2 – четная цифра
B не благоприятствует A, т.к. если мы знаем, что номер оканчивается на четную цифру, то не обязательно, что это будет цифра 2.
A и C – равновозможные события, они имеют одинаковые шансы на успех, 1 шанс из 10.

Теоремы теории вероятностей

1. Теорема сложения для несовместимых событий.

Если А и В два несовместимых события (т.е. никогда не происходят вместе), то вероятность, что произойдет хотя бы одно из них равна сумме вероятностей**:** **p(A+B)=p(A)+p(B)**

A+B –сумма событий, т.е. произошло хотя бы одно из двух событий А или В

2. **Теорема умножения**.

Если А и В два независимых события (т.е. одно никак не влияет на другое), то вероятность того, что события произойдут одновременно, равна произведению вероятностей: **p(A·B)=p(A)·p(B)**

A·B – произведение событий, т.е. события произошли одновременно, А и В вместе

3. Теорема сложения для произвольных событий.

Если А и В два произвольных события, то вероятность, что произойдет хотя бы одно из них вычисляется по формуле: **p(A+B)=p(A)+p(B) - p(A)·p(B)**

A+B – сумма событий, т.е. произошло хотя бы одно из двух событий А или В

Задача. Даны случайные события и их вероятности:

А= «в конкурсе победил Кузнецов»;p(A)=0,5

В= «в конкурсе победил Зуев» ;p(B)=0,9

1. Найти вероятность, что в конкурсе не победил Кузнецов:

p($\bar{A}$)=1-0,5=0,5 2.

2. Найти вероятность, что в конкурсе не победил Зуев:

p($\bar{B}$)=1-0,9=0,1

3. Найти вероятность, что оба победят в конкурсе: $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = 0,5 \cdot 0,9 = 0,45$

4. Найти вероятность, что кто-то победит:

$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B) = 0,5 + 0,9 - 0,5 \cdot 0,9 = 1,4 - 0,45 = 0,95$

5. Найти вероятность, что оба не победят:

$P(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$

Дискретная случайная величина, ее представление и характеристики

Случайной называют величину, которая в результате испытания может принять некоторое числовое значение.

Примеры: X – сумма цифр случайного двухзначного числа.

Y – рост случайного человека

Z – время ожидания автобуса

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать числами 1, 2, 3, 4 …

Пример:

X – *количество выпавших очков при подбрасывании кубика*.

Возможные значения: *1, 2, 3, 4, 5, 6.*

Y- *количество попаданий в цель при трех выстрелах*.

Возможные значения: *0, 1, 2, 3.*

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой указаны все возможные значения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности этих значений, т.е.

X	x_1	x_2	X_3	…	x_n
P	p_1	p_2	P_3		p_n

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Характеристики дискретной случайной величины.

$M(X)= x_1 p_1+ x_2 p_2+\ldots+ x_n p_n$ - математическое ожидание случайной величины X.

Закон распределения квадрата случайной величины X^2

x^2	x^2_1	x^2_2	X^2_3	…	x^2_n
p	p_1	p_2	P_3		p_n

$M(X^2)= x^2_1 p_1+ x^2_2 p_2+\ldots+ x^2_n p_n$ - математическое ожидание квадрата X^2 -

$D(X) = M(X^2)- (M (X))^2$ – дисперсия случайной величины, которая находится, как разность математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания.

σ – стандартное отклонение, равное корню из дисперсии - $\sigma = \sqrt{D(X)}$

Задача. Дан закон распределения дискретной случайной величины. Найти характеристики.

x	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

$M(X)= x_1 p_1+ x_2 p_2+ x_3 p_3=1\cdot0,5+2\cdot0,3+3\cdot0,2=0,5+0,6+0,6=1,7$

x^2	1	4	9
p	0,5	0,3	0,2

$M(X^2)= x^2_1 p_1+ x^2_2 p_2+ x^2_3 p_3 =1\cdot0,5+4\cdot0,3+9\cdot0,2=0,5+1,2+1,8=3,5$

$D(X) = M(X^2)- (M (X))^2 =3,5-(1,7)^2=3,5-2,89=0,61$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,61} \approx 0,78$$

Выборка, ее представление и числовые характеристики

Выборка – это множество случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Генеральная совокупность – это множество всех объектов.

Например, если мы хотим выяснить, сколько часов студент нашего колледжа проводит у компьютера, мы должны опросить весь колледж. Все студенты колледжа – это генеральная совокупность. Чтобы не опрашивать всех студентов, можно отобрать группу студентов, которая для нашего эксперимента будет являться выборкой.

Пусть у пятерых студентов спросили, какую они получили оценку по математике. Результат опроса записали в виде выборки:

$$3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 3$$

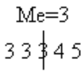
Каждое значение выборки называется *вариантой*.

Объем выборки ***n*** – количество наблюдений.
Для примера *n*=5, т.к. было опрошено пять студентов.
Выборку удобно представлять в виде вариационного ряда.
Вариационный ряд – это упорядоченная по возрастанию выборка.
Была выборка *3 4 5 3 3* , получим вариационный ряд

$$3\;3\;3\;4\;5$$

Числовые характеристики выборки

Мода Мо– наиболее часто встречаемое значение .
Для примера Мо=3, т.к. оценка 3 встречалась чаще всего.
Медиана Ме – значение вариационного ряда, которое делит ряд на две равные по количеству вариант части.
Для примера Ме =3



Если объем выборки n-число четное, то берется среднее арифметическое двух соседних значений.

$$Me=3{,}5$$

$$1\ 2\ 3\,|\,4\ 5\ 6$$

Размах вариации R– разность между максимальным и минимальным значением выборки.

Для примера R=5-3=2, 5 – максимальная оценка, 3 – минимальная оценка.

Опр. $\boldsymbol{X_{cp} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}}$ - *среднее значение выборки*, которое находится, как отношение суммы все вариант к их количеству.

Для примера: $X_{cp} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{3+3+3+4+5}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$

Опр. $\boldsymbol{X^2{}_{cp} = \frac{X^2{}_1 + X^2{}_2 + ... + X^2{}_n}{n}}$ - *среднее значение квадрата выборки*, которое находится, как отношение суммы квадратов всех вариант к их количеству.

Для примера:

$$X^2{}_{cp} = \frac{X^2{}_1 + X^2{}_2 + ... + X^2{}_n}{n} = \frac{3^2+3^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{9+9+9+16+25}{5}$$

$$X^2{}_{cp} = \frac{9+9+9+16+25}{5} = \frac{68}{5} = 13{,}6$$

Опр. $\boldsymbol{D}$ – *выборочная дисперсия*, которая характеризует меру рассеивания вариант относительно среднего значения. Дисперсия всегда является числом положительным, и будем вычислять дисперсию по формуле: $\boldsymbol{D = X^2{}_{cp} - (X_{cp})^2}$

где $\boldsymbol{X^2{}_{cp}}$ - среднее значение квадрата выборки

$\boldsymbol{(X_{cp})^2}$ - квадрат среднего значения выборки

Для примера: $D = X^2{}_{cp} - (X_{cp})^2 = 13,6 - (3,6)^2 = 13,6 - 12,96 = 0,64$

Опр. σ – *стандартное отклонение* равно квадратному корню из дисперсии: $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{D}}$

Для примера: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0,64} = 0,8$