Тема №7 «Геометрия в пространстве»

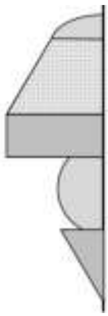
Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Нарисовать многогранник в пространстве, который содержит: 6 вершин, 10 ребер, 6 граней. Будет ли этот многогранник выпуклым?

Задание 2. Нарисовать прямую шестиугольную призму. Изобразить на ней следующие прямые и плоскости:
A) две параллельные прямые
B) две пересекающиеся прямые
C) две перпендикулярные прямые
D) две скрещивающиеся прямые
E) плоскость и параллельную ей прямую
F) плоскость и перпендикулярную ей прямую
G) две параллельные плоскости
H) две перпендикулярные плоскости
I) две пересекающиеся плоскости

Задание 3. Построить комбинированную пространственную фигуру, которая должна содержать: прямую призму, пирамиду, наклонную призму, усеченную пирамиду.

Задание 4. Дана плоская фигура и ось вращения. Построить тело вращения и назвать, из каких известных фигур оно состоит:



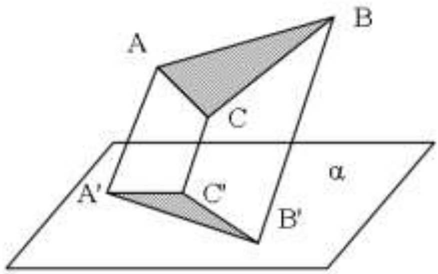
Теоретические вопросы

1. Как прямые могут располагаться в пространстве?
2. Как прямая может располагаться в пространстве по отношению к плоскости?
3. Как плоскости могут располагаться в пространстве?
4. Нарисовать и охарактеризовать следующие фигуры в пространстве: призма, пирамида, усеченная пирамида, цилиндр, конус, усеченный конус, шар, шаровой сегмент, шаровой конус, шаровой сектор, шаровой слой.
5. Как строятся тела вращения?

Геометрия в пространстве

Изображение фигур методом параллельной проекции, свойства параллельной проекции

Для того чтобы изобразить пространственную фигуру на листе бумаги, можно воспользоваться ***методом параллельной проекции***. Для этого через каждую точку фигуры в пространстве проведем параллельные прямые до пересечения *с* ***плоскость проекции α*** , в качестве которой выступает лист бумаги:



AA'//BB'//CC'

ABC – ***оригинал*** фигуры в пространстве

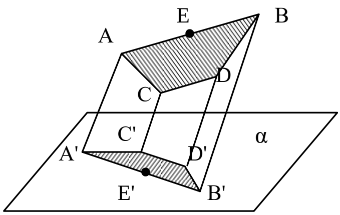
A'B'C' – ***изображение*** фигуры

α – ***плоскость проекции.***

Основные свойства метода параллельной проекции:

*1.*Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми:

Если AB//CD , то A'B'//C'D'



2.При параллельной проекции длина отрезка не сохраняется: *AB≠A'B'*

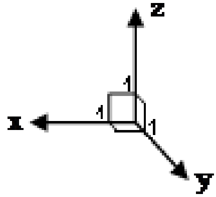
3. При параллельной проекции величина угла не сохраняется: ∟*CAB*≠∟*C'A'B'*

4. Если точка принадлежит линии, то ее проекция будет принадлежать проекции линии. *Точка E лежит на прямой AB, следовательно, точка E' принадлежит прямой A'B'.*

5. Прямоугольник, квадрат, ромб, параллелограмм будут изображаться в виде произвольного параллелограмма. Трапеция изображается в виде произвольной трапеции. Треугольник – в виде произвольного треугольника. Окружность – в виде овала.

На чертеже фигура A'B'D'C' - трапеция, которая является изображением трапеции ABDC

Введем в пространстве систему координат XYZ, оси которой взаимно перпендикулярны , и построим ее параллельную проекцию таким образом, чтобы оси OX и OZ изображались без искажений, а ось OY располагалась под углом 45° к горизонтальной линии и имела коэффициент искажения, равный 0,5. Т.е. масштабные единицы по осям OX и OZ совпадают, а масштабная единица по оси OY в два раза меньше. Такая проекция называется ***кабинетной***.



Плоскость XOY называется ***горизонтальной*** плоскостью

Плоскость XOZ называется ***фронтальной*** плоскостью

Плоскость ZOY называется ***профильной*** плоскостью

Любая точка пространства имеет три координаты A(x,y,z)

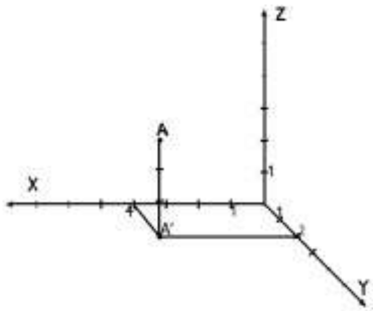
x - ***абсцисса*** - широта,

y – ***ордината*** - долгота ,

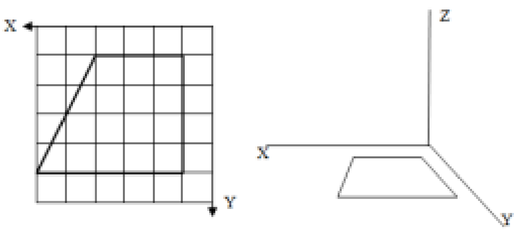
z – ***импликата*** – высота

Согласно чертежу, точка A имеет координаты:

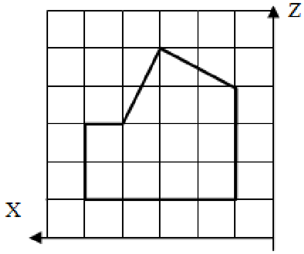
x =4 y=2 z=3, A(4;2:3)

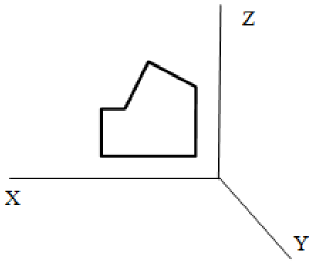


Задача 1. Дан оригинал фигуры, которая лежит в горизонтальной плоскости. Построить ее изображение в кабинетной проекции.

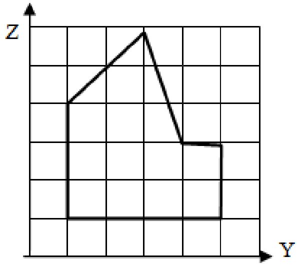


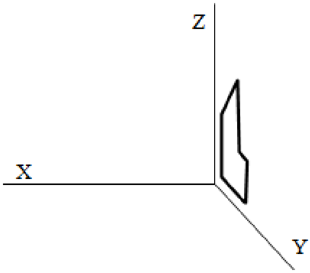
Задача 2. Дан оригинал фигуры, которая лежит в фронтальной плоскости. Построить ее изображение в кабинетной проекции.





Задача 3. Дан оригинал фигуры, которая лежит в профильной плоскости. Построить ее изображение в кабинетной проекции.



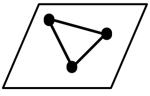


Взаимное расположение прямых, плоскостей в пространстве

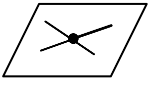
В пространстве есть три базовых понятия: ***точка, прямая и плоскость***. Рассмотрим ***способы построения прямых и плоскостей***

1) через любые две несовпадающие точки можно провести единственную прямую

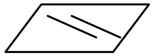
2) через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость



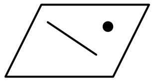
3) через любые две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость



4) через любые две параллельные прямые можно провести единственную плоскость



5)   через любую прямую и точку, не лежащей на этой прямой, можно провести единственную плоскость

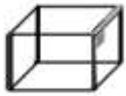


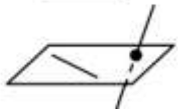
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Прямые могут ***пересекаться***, т.е. иметь одну общую точку

Прямые могут быть ***параллельны***, если они лежат в одной плоскости и никогда не пересекаются

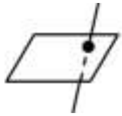
Прямые могут быть ***перпендикулярны***, если существуют две прямые, которые параллельны им, которые лежат в одной плоскости и пересекаются под углом 90º.





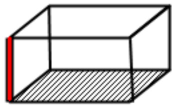
Прямые могут быть ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости. ***Признак* скрещивающихся прямых**: если одна из прямых лежит в плоскости, а вторая прямая пересекает эту плоскость в точке, которая не лежит на первой прямой, то такие прямые скрещиваются

Взаимное расположение прямой и плоскости

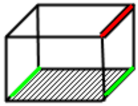



Прямая может ***лежать*** в плоскости

Прямая может ***пересекать*** плоскость в точке



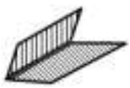
Прямая может быть ***перпендикулярная*** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости. Согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости, достаточно иметь две пересекающиеся прямые в плоскости, которым бы была перпендикулярна прямая, чтобы утверждать, что прямая перпендикулярна плоскости



Прямая может быть ***параллельна*** плоскости, т.е. прямая и плоскость не пересекаются. Для того чтобы утверждать, что прямая параллельна плоскости, необходимо иметь в плоскости прямую, которая была бы параллельна исходной прямой.

Взаимное расположение двух плоскостей

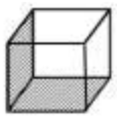
Плоскости могут ***совпадать***, т.е. любая точка одной плоскости обязательно принадлежит другой плоскости.

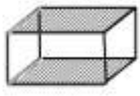


Плоскости могут ***пересекаться*** по прямой

Плоскости могут быть ***перпендикулярны***, если одна из плоскостей содержит перпендикуляр к другой плоскости.

Плоскости могут быть ***параллельны***, если они никогда не пересекаются. ***Признак*** **параллельности**: если одна из плоскостей содержит две пересекающиеся прямые, которые соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, которые лежат во второй плоскости, то эти
плоскости параллельны.





Многогранники и тела вращения

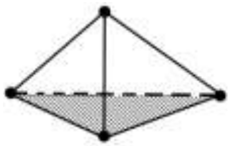
Многогранник - пространственное тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками – ***гранями*****.** Стороны граней называются *ребрами*, а концы ребер - ***вершинами***. Многогранник в трехмерном пространстве должен обладать следующими свойствами:

1) каждое ребро многогранника принадлежит только двум смежным граням

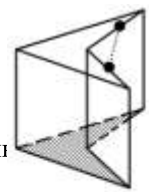
2) из любой точки одной грани можно добраться до любой точки другой грани по смежным граням (это свойство связности)

По числу граней различают 4-гранники, 5-гранники и т.д.

Многогранник называется ***выпуклым***, если отрезок, соединяющий две точки любых двух граней, лежит внутри многогранника, в противном случае многогранник называется ***невыпуклым***.

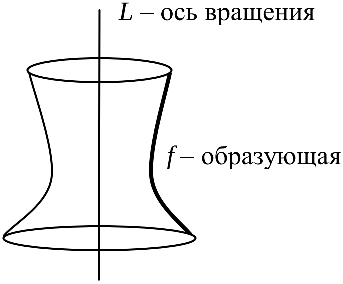


Пирамида:
Количество граней -4
Количество ребер -6
Количество вершин -4
Выпуклый многогранни



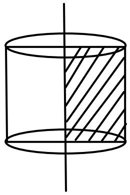
Многогранник:
Количество граней -6
Количество ребер -12
Количество вершин -8
Невыпуклый многогранник

Тело вращения – это пространственное тело, которое получается в результате вращения плоской фигуры относительно оси вращения.



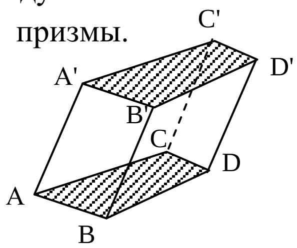
В результате вращения образующей f относительно оси вращения L получим тело вращения. Каждая точка образующей вращается по кругу, который на чертеже выглядит, как овал.

При вращении прямоугольника относительно своей стороны получим прямой круговой цилиндр



Призма: определение, свойства, виды призм, объем призмы

Призма – это многогранник, в основании которого лежат два равных и соответственно параллельных между собой многоугольника, называемые основаниями призмы.



Согласно определению будем иметь:

AB//A'B' BD// B'D' CD// C'D' AC// A'C'

□ABDC=□A'B'D'C'

ABDC – нижнее основание призмы

A'B'D'C' – верхнее основание призмы

A,B,D,C,A',B',D',C' – вершины призмы

AA', BB', DD', CC' - боковые ребра призмы

AA'B'B, DD' B'B, CC'D'D, AA'C'C - боковые грани призмы

Свойства призмы

1. Все боковые ребра призмы параллельны и равны между собой

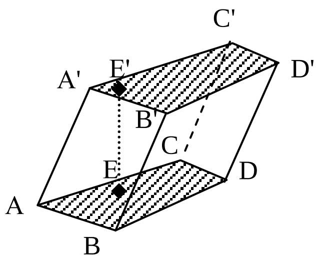
AA'=BB'=DD'=CC'

AA'//BB'//DD'//CC'

2. Все боковые грани призмы – параллелограммы

Диагональ призмы – отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани.

<u>Пример:</u> AD', B'C, BC', A'D – диагонали призмы.



Высота призмы – перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на нижнее основание.

Пример: EE' – высота призмы,

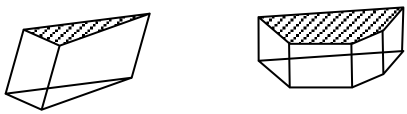
EE'⊥ ABDC

EE'⊥ A'B'D'C'

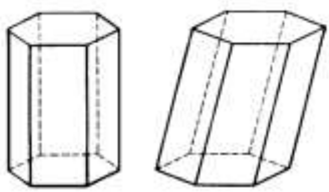
H= EE' – длина высоты

Виды призм

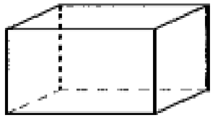
По виду основания различают треугольную, четырехугольную, пятиугольную и т.д. призму.



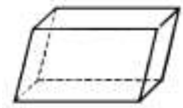
Прямая призма – призма, боковое ребро которой перпендикулярно основанию призмы. В общем случае призма – ***наклонная***.



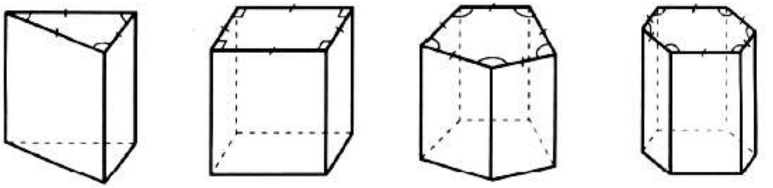
Прямоугольный параллелепипед – прямая призма, в основании которого лежит прямоугольник, и все боковые грани тоже прямоугольники.



Параллелепипед – призма, у которой шесть граней и каждая из них параллелограмм.



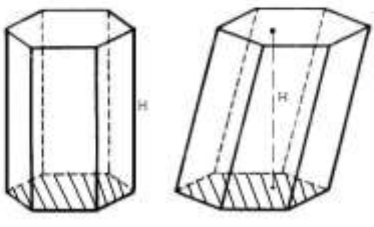
Правильная призма – это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, все стороны и углы которого равны.



треугольная четырехугольная пятиугольная шестиугольная

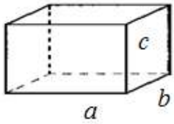
Объем призмы равен произведению высоты призмы на площадь основания.

$$V = H \cdot S_{осн}$$

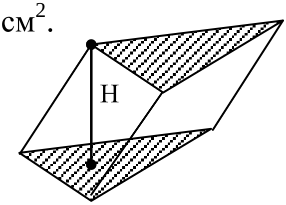


В прямой призме боковое ребро выступает в роли высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его размеров $V = a \cdot b \cdot c$



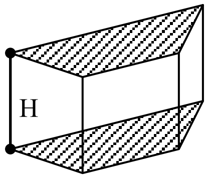
Задача 1: Построить наклонную треугольную призму, изобразить высоту призмы. Найти объем призмы, если известна высота призмы H=3 см и площадь основания S=2 см^2.



Решение: $V = H \cdot S_{осн} = 3 \cdot 2 = 6 см^3$

Задача 2: Построить прямую четырехугольную призму. Известна высота призмы H=5 см, площадь основания S=3 см^2. Найти объем призмы

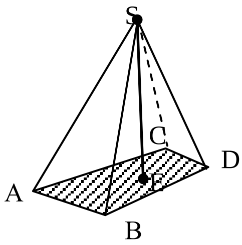
Решение: $V = H \cdot S_{осн} = 5 \cdot 3 = 15 см^3$



Пирамида: определение, свойства, виды пирамид, усеченная пирамида, объем пирамиды.

Для того чтобы построить пирамиду, необходимо в плоскости начертить многоугольник, выбрать некоторую точку в пространстве и соединить каждую точку многоугольника с этой точкой.

Пирамида – многогранник, основание которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину, которая называется ***вершиной пирамиды***.



Согласно определению будем иметь:

S – вершина пирамиды

ABDC – основание пирамиды

AS, BS, DS, CS - боковые ребра пирамиды

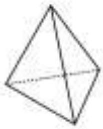
ABS, BDS, CDS, ACS - боковые грани пирамиды

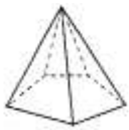
Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на основание пирамиды.

Пример: SE – высота пирамиды,

SE⊥ ABDC

H= SE – длина высоты

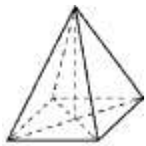




Виды пирамид

По виду основания различают треугольную, четырехугольную, пятиугольную и т.д. пирамиду.

Пирамида называется ***правильной***, если её основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания



Пример: в основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Центр квадрата – это точка пересечения его диагоналей. Вершина пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей.

Усеченная пирамиды

Если построить плоскость, которая будет параллельна основанию пирамиды, то получим усеченную пирамиду.

ABDC – нижнее основание усеченной пирамиды

A'B'D'C' – верхнее основание усеченной пирамиды

Объем пирамиды

$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{OCH}$, **H** – высота пирамиды, **S**

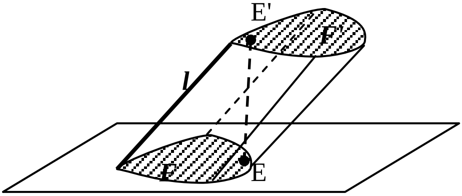
Цилиндр: определение, свойства, виды цилиндров, объем цилиндра

Если начертить на плоскости некоторую замкнутую кривую ***F***, для каждой точки кривой построить отрезок, параллельный и равный некоторому фиксированному отрезку ***l***, который будем называть ***образующей***, то получим цилиндрическую поверхность. Фигура, ограниченная цилиндрической поверхностью, называется ***цилиндром***.

l – образующая цилиндра

F – нижнее основание цилиндра

F' – верхнее основание цилиндра



Свойства цилиндра – нижнее и верхнее основания цилиндра соответственно параллельны и равны: ***F= F', F// F'***

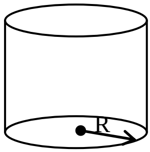
Высота цилиндра – перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на нижнее основание: EE' – высота цилиндра, EE'⊥ F, EE'⊥ F', H= EE' – длина высоты

Виды цилиндров

Прямым цилиндром называют цилиндра, образующая которого перпендикулярна основанию цилиндра и совпадает с высотой. В противном случае цилиндр называют ***наклонным***.

Круговой цилиндр – цилиндр, в основании которого лежит круг.

Прямой круговой цилиндр – это прямой цилиндр, в основании которого лежит круг.



Объем цилиндра - $V = H \cdot S_{осн}$,

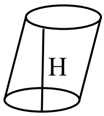
H- высота цилиндра, $S_{осн}$ – площадь основания

Объем кругового цилиндра - $V = H \cdot \pi \cdot R^2$,

H- высота цилиндра, R – радиус круга

Задача. Построить наклонный круговой цилиндр и изобразить в нем высоту. Найти объем цилиндра, если высота равна 4 см, а радиус основания R=2

Решение:



$V = H \cdot \pi \cdot R^2$

H=z=4.

R=2

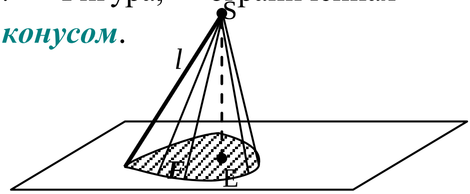
$V = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 4 \cdot \pi \cdot 4 = 16\pi$

Конус: определение, виды конусов, усеченный конус, объем конуса

Если начертить на плоскости некоторую замкнутую кривую ***F***, в пространстве выбрать произвольную точку, которую будем называть ***вершиной***, и соединить каждую точку кривой с вершиной , то получим каноническую поверхность. Фигура, ограниченная канонической поверхностью, называется ***конусом***.

Фигуру *F* называют ***основанием*** конуса.

S – ***вершина*** конуса



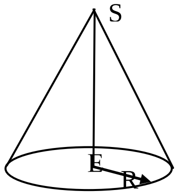
Отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой кривой F, называется ***образующей*** конуса.

l – образующая конуса

Высота конуса – перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание конуса.

SE – высота конуса

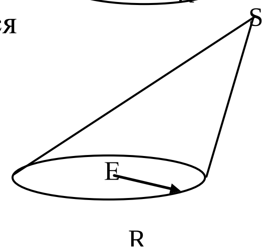
$SE \perp F$



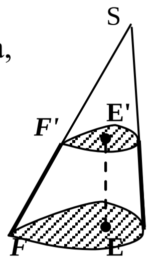
Виды конуса

Прямой круговой конус – это конус, в основании которого лежит круг, а вершина конуса проецируется в центр основания.

Если вершина не проецируется в центр основания, то такой круговой конус называется ***наклонным***.



Усеченный конус



Если построить плоскость, параллельную основанию конуса, то получим усеченный конус.

F - нижнее основание конуса

F' - верхнее основание конуса

Основания усеченного конуса параллельны и подобны.

$F /\!/ F'$

$F \approx F'$

Объем конуса - $V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{OCH}$, **H** – высота конуса

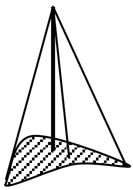
$S_{осн}$ – площадь основания конуса

Объем кругового конуса - $V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \pi \cdot R^2$,

H – высота конуса

R – радиус основания конуса

Задача . Построить произвольный конус и изобразить высоту конуса. Найти объем конуса, если его высота H=4, а площадь основания $S_{осн}$=6см^2.

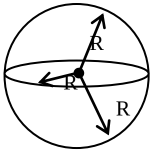


Решение:

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{OCH} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8 см^2$$

Шар, сфера, части шара. Объем шара.

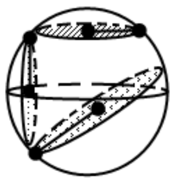
Сфера – множество точек пространства, равноудаленных относительно некоторого центра.
Шар – множество точек пространства, расстояние от которых до некоторого центра не превышает фиксированного числа R. Сфера внутри полая, шар – нет.



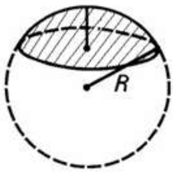
Части шара

Большой круг шара – круг, проходящий через центр шара.

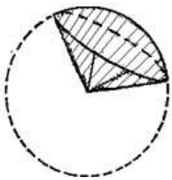
Малый круг шара – круг, который получается при пересечении шара произвольной плоскости.



При пересечении шара произвольной плоскостью от шара отсекается фигура, называемая ***шаровым сегментом***.



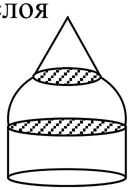
Шаровой сектор – это часть шара, которая состоит из конуса, вершина которого лежит в центре шара и шарового сегмента, построенного на основании конуса.



Шаровой слой – это часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями

Объем шара - $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, R – радиус шара

Задача 1. Построить шаровой слой, на нижнем основании слоя построить цилиндр, а на верхнем основании конус.



Задача 2. Найти объем шара, если его радиус равен 3 см

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 108\pi \ см^3$$