КОМИТЕТ ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ
«ВОЛХОВСКИЙ АЛЮМИНИЕВЫЙ КОЛЛЕДЖ»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ДИСЦИПЛИНА МАТЕМАТИКА

Разработчик:
Фомина Елена Анатольевна
преподаватель математики и информатики

Волхов 2017

Учебное пособие разработано в соответствии с примерной рабочей программой по математике для 1 курса СПО. В пособии приведено краткое изложение теоретических вопросов темы «Дифференцирование и интегрирование функции»; разбираются решения базовых задач; предлагаются задачи для самостоятельного решения, список литературы.

Рассмотрена и одобрена
цикловой комиссией
математических и общих естественно-научных дисциплин и специальности
18.02.03 « Химическая технология неорганических веществ»
Протокол № 5 от « 11» января 2017 г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УР
_______________ Т.М.Рябинина
«_____» _______________2017 г.

Председатель математических и общих естественно-научных дисциплин

__________________Борошнева Н.В.

Организация-разработчик: ГБПОУ ЛО «Волховский алюминиевый колледж»

Разработчик:
Фомина Е.А., преподаватель ГБПОУ ЛО «Волховский алюминиевый колледж»

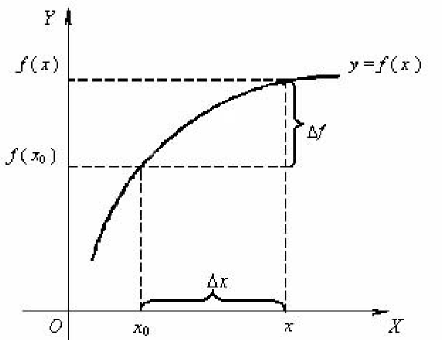
Содержание

Глава 1. Дифференцирование функции

Изучая понятие предела функции в точке, мы пришли к выводу, что существование предела связано с непрерывностью функции в точке. Предел позволяет определить, будет ли функция в точке непрерывна, или функция в точке терпит разрыв.

Следующее понятие, которое мы будем изучать для функции, это понятие производной функции в точке. С помощью производной можно выяснить, на каких интервалах функции возрастает, на каких убывает; в каких точках интервала функция достигает максимального или минимального значения и т.д. С помощью производной можно представить, как будет выглядеть график функции.

1.1 Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл



Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$ и зафиксируем на графике точку x_0.

Сделаем шаг вправо от точки x_0 и попадем в точку x.

Опр. $\Delta x = x - x_0$ - называется *приращением аргумента* (читается «дельта икс»)

Дав приращение аргументу, функция изменит свое значение: было значение $f(x_0)$, стало значение $f(x)$

Опр. $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ - называется *приращением функции* (читается «дельта эф в точке x_0 »)

Опр. *Производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

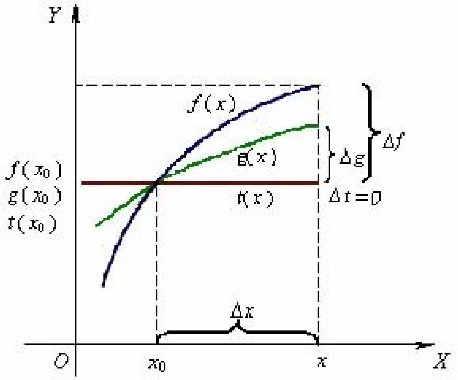
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$f'(x_0)$ -производная функции точке x_0, читается «эф штрих в точке x_0»

Операция нахождения производной от данной функции называется *дифференцированием*.

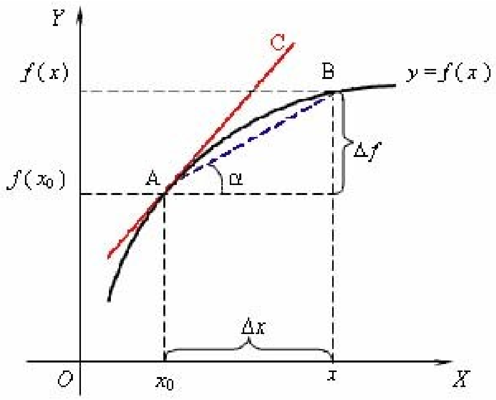
Рассмотрим **физический смысл производной**.

Производная показывает, как быстро успевает изменяться функция вслед за изменением аргумента x. Т.к. приращение аргумента Δx стремится к нулю (шаг вправо – число близкое к нулю), можно утверждать, что производная функции в точке – это *мгновенная скорость изменения функции*.



Для рисунка производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 больше, чем производная функции $y = g(x)$, т.к $\Delta f > \Delta g$. А производная функции $y=t(x)$, график которой из себя представляет прямую, в точке x_0 равна нуль, т.к. давая приращение аргументу $\Delta x = x - x_0$, функция не меняется, т.е. ее приращение равно нулю: $\Delta t = t(x) - t(x_0) = 0$.

Рассмотрим **геометрический смысл производной.**



Дав приращение аргументу Δx, мы по графику из точки А попадем в точку В.

Отрезок АВ называется *секущей*.

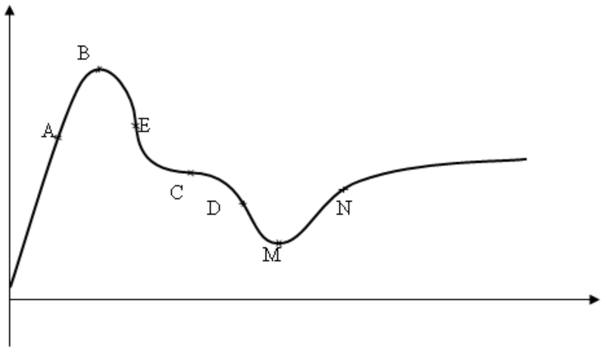
Если приращение Δx стремится к нулю, то секущая стремится занять положение прямой АС, которая имеет только одну общую точку с кривой, и называется *касательной*.

$tg\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ - тангенс угла наклона секущей АВ к положительному направлению оси ОХ.

Учитывая определение производной и тот факт, что секущая стремится занять положение касательной, можно утверждать, что производная функции в точке x_0 – это *тангенс угла наклона касательной*, проведенной к графику функции в точке x_0 .
Касательная в точке показывает направление движения функции.
Таким образом, с помощью линейки, карандаша и транспортира мы можем найти производную функции в точке $f'(x_0)$, выполнив следующие действия:
1. Построить касательную к графику в точке x_0
2. Измерить транспортиром α - угол наклона касательной к положительному направлению оси OX
3. Найти тангенс угла наклона $tg(\alpha)=f'(x_0)$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

1. Перерисовать чертеж и построить в указанных точках касательные.



2. Какому углу касательной соответствует производная равная нулю?

3. Для каких углов касательной производная принимает положительные значения?

4. Для каких углов касательной производная принимает отрицательные значения?

5. Может ли производная не существовать в точке, чему в этом случае равен угол наклона касательной?

6. Заполнить таблицу, использую точки графика.

	В каких точках производная положительная	В каких точках производная отрицательная	В каких точках производная равна нулю	В каких точках производная не существует
точки графика				

1.2 Производные элементарных функций

Для того чтобы найти производную функции в точке, необходимо воспользоваться определением производной.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Т.е. следует оценить приращение аргумента, приращение функции, найти предел. Рассмотрим задачу.

Задача. Найти производную функции $y=x^2$ в точке $x_0=1$

$x_0 = 1$

$\Delta x = x - x_0 = x - 1$

$f(x_0) = x_0{}^2 = 1^2 = 1$

$f(x) = x^2$

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = x^2 - 1$

$\Delta x \to 0$

$x - x_0 \to 0$

$x \to x_0$

$x \to 1$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{\Delta x \to 0} (x+1) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Ответ: $f'(1) = 2$

Для элементарных функций существую формулы для нахождения производной в произвольной точке. Мы не будем выводить эти формулы, научимся их применять при решении задач.

Формулы производных элементарных функций

1. $(k)' = 0$, *k=const* - *производная константы,* равна нулю

Пример: $(3)' = 0 \quad (-5)' = 0 \quad (0)' = 0$

2. $(x)' = 1$ - *производная функции y= x*

3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ - *производная степенной функции*

Пример: $(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x$; $(x^{10})' = 10 \cdot x^{10-1} = 10 \cdot x^9$

При дифференцировании степенной функции степень понижается.

4. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ - *производная показательной функции*

Пример: $(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x$; $(10^x)' = \ln 10 \cdot 10^x$

5. $(e^x)' = \ln e$ - *производная экспоненциальной функции равна натуральному логарифму (e≈2,7)*

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a \cdot x}$ - *производная логарифмической функции*

Пример: $(\log_3 x)' = \dfrac{1}{\ln 3 \cdot x}$; $(\lg x)' = \dfrac{1}{\ln 10 \cdot x}$, т.к. $\log_{10} x = \lg x$

7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ - *производная натурального логарифма*

8. *Производные тригонометрических функций*

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **;** $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

Рассмотрим решение задач.

Задача 1. Найти производные функций в указанных точках

A)

$$y = x^7$$

x_0=2

$$y' = (x^7)' = 7x^6$$

$$y'(x_0) = y'(2) = 7 \cdot 2^6 = 7 \cdot 64 = 448$$

B)

$$y = \log_8 x$$

$$x_0 = 5$$

$$y' = (\log_8 x)' = \frac{1}{\ln 8 \cdot x}$$

$$y'(x_0) = y'(5) = \frac{1}{\ln 8 \cdot 5}$$

C)

$$y = ctg(x)$$

$$x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$y' = (ctg(x))' = ctg'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$y'\left(x_0\right) = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

Задача 2. Найти производные степенных функций

$$(x^9)' = 9x^8$$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4 \cdot x^{-4-1} = -4 \cdot x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$$

$$(\sqrt[7]{x})' = \left(x^{\frac{1}{7}}\right)' = \frac{1}{7}\cdot x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7}\cdot x^{\frac{1}{7}-\frac{7}{7}} = \frac{1}{7}\cdot x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7\cdot\sqrt[7]{x^6}}$$

$$(\sqrt[8]{x^5})' = \left(x^{\frac{5}{8}}\right)' = \frac{5}{8}\cdot x^{\frac{5}{8}-1} = \frac{5}{8}\cdot x^{\frac{5}{8}-\frac{8}{8}} = \frac{5}{8}\cdot x^{-\frac{3}{8}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{8}}} = \frac{5}{8\cdot\sqrt[8]{x^3}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}\right)' = \left(x^{-\frac{5}{8}}\right)' = -\frac{5}{8}\cdot x^{-\frac{5}{8}-1} = -\frac{5}{8}\cdot x^{-\frac{5}{8}-\frac{8}{8}} = -\frac{5}{8}\cdot x^{-\frac{13}{8}} = -\frac{5}{8\cdot\sqrt[8]{x^{13}}}$$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти значение производной функции в точке

$\begin{matrix} y = 7 \\ x_0 = 6 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = x \\ x_0 = -3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = x^3 \\ x_0 = 5 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = \sqrt{x} \\ x_0 = 16 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = 7^x \\ x_0 = 1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = e^x \\ x_0 = 2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = \log_4 x \\ x_0 = 3 \end{matrix}$

$\begin{matrix} y = \ln x \\ x_0 = 8 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = \sin(x) \\ x_0 = \frac{\pi}{3} \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = \cos(x) \\ x_0 = \frac{\pi}{4} \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = tg(x) \\ x_0 = \frac{\pi}{6} \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = ctg(x) \\ x_0 = \frac{3\pi}{4} \end{matrix}$

Задача 2. Найти производную степенной функции

$(x^{45})'$; $\left(\frac{1}{x^{11}}\right)'$; $(\sqrt[6]{x})'$; $(\sqrt[7]{x^4})'$; $\left(\frac{1}{\sqrt[9]{x}}\right)'$; $\left(\frac{1}{\sqrt[12]{x^5}}\right)'$

1.3 Правила нахождения производной

Имея элементарные функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$, четыре основные алгебраические операции (сложение, вычитание, произведение и деление) можно построить другие функции:

$$f(x)+g(x)\ ; \quad f(x)-g(x); \quad f(x)\cdot g(x)\ ; \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

В этом случае для нахождения производной будем использовать следующие правила:

1. **Правило вынесения постоянного коэффициента из под знака производной.**

$$\boldsymbol{(kf(x))'=k\cdot f'(x)\ ,\ k=const}$$

- коэффициент можно выносить из под знака производной.

Пример: $(5\cdot x^3)'=5\cdot(x^3)'=5\cdot 3\cdot x^2=15x^2$

$k=5,\ f(x)=x^3$

2. **Правила для нахождения производной суммы (разности):**

$$\boldsymbol{(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)}$$

- производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных

Пример: $(5+\sin(x))'=(5)'+(\sin(x))'=0+\cos(x)=\cos(x)$

Пример: $(x-\log_3 x)'=(x)'-(\log_3 x)'=1-\dfrac{1}{x\ln 3}$

3. **Правила для нахождения производной произведения:**

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

- производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую функцию и первой функции на производную второй функции:

$$(f\cdot g)'=f'g+f\cdot g'$$ *- краткая формула*

Пример:

$$(\sqrt{x}\cdot\cos(x))' = ?$$

$$(\sqrt{x}\cdot\cos(x))' = (\sqrt{x})'\cdot\cos(x) + \sqrt{x}\cdot(\cos(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos(x) + \sqrt{x}\cdot(-\sin(x)) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos(x) - \sqrt{x}\cdot\sin(x)$$

4. **Правила для нахождения производной дроби:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

- *производная дроби равна дроби, числитель которой равен разности произведений производной числителя на знаменатель и числитель на производную знаменателя, а знаменатель дроби равен квадрату знаменателя.*

Пример:

$$\left(\frac{e^x}{x^9}\right)' = ? \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{e^x}{x^9}\right)' = \frac{(e^x)'\cdot x^9 - e^x\cdot(x^9)'}{(x^9)^2} = \frac{e^x\cdot x^9 - e^x\cdot 9x^8}{x^{18}}$$

1.4 Производная многочлена

Пусть функция задана в виде многочлена *n-й* степени.
Пример:
$4x-3$ - многочлен первой степени

x^2-3x+5 - многочлен второй степени

$9x^5-x^4+2x^3-x^2+7x-3$ - многочлен пятой степени

Для нахождения производной многочлена *n-й* степени будем использовать следующие правила и формулы:

- правило перехода от производной суммы или разности к сумме или разности производных: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- правило вынесения коэффициента из под знака производной:
  $$(kf(x))' = k \cdot f'(x)\ ,\ k = const$$
- формулу для нахождения производной постоянной функции:
  $$(C)' = 0\ ,\ C = const$$
- формулу для нахождения производной функции $y = x$:
  $$(x)' = 1$$
- формулу для нахождения производной степенной функции
  $$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Пример:

$$(4x - 3)' = (4x)' - (3)' = 4 \cdot (x)' - (3)' = 4 \cdot 1 - 0 = 4$$

$$\left(x^2 - 3x + 5\right)' = (x^2)' - (3x)' + (5)' = 2x - 3 + 0 = 2x - 3$$

$$(9x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 3)' = (9x^5)' - (x^4)' + (2x^3)' - (x^2)' + (7x)' - (3)' =$$

$$9 \cdot 5x^4 - 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 2x + 7 - 0 = 45x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$$

Пусть функция из себя представляет дробно-рациональную функцию, т.е. задана в виде дроби, в которой числитель и знаменатель – это многочлены определенной степени.

Пример:

$$\frac{8x - 7}{x^3 + 6x^2 - 5x + 2}$$

Для нахождения производной дробно-рациональной функции к перечисленным правилам добавляется правило нахождения производной дроби:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Пример:

$$\left(\frac{8x-7}{x^3+6x^2-5x+2}\right)' =$$

$$\frac{(8x-7)'\cdot(x^3+6x^2-5x+2)-(8x-7)\cdot(x^3+6x^2-5x+2)'}{(x^3+6x^2-5x+2)^2} =$$

$$\frac{8\cdot(x^3+6x^2-5x+2)-(8x-7)\cdot(3x^2+12x-5)}{(x^3+6x^2-5x+2)^2} =$$

$$\frac{8x^3+48x^2-40x+16-24x^3-96x^2+40x+21x^2+84x-35}{(x^3+6x^2-5x+2)^2} =$$

$$\frac{-16x^3-47x^2+84x-19}{(x^3+6x^2-5x+2)^2}$$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Используя правила дифференцирования, найти производные

А) $(2\cdot x^4)'$; $(5\cdot tg(x))'$; $(-3\cdot 9^x)'$

В) $(6+\sqrt{x})'$; $(e^x+x^5)'$; $(ctg(x)+\ln(x))'$

С) $(\frac{1}{x}\cdot\cos(x))'$; $\left(\log_7 x\cdot x\right)'$; $\left(\sqrt{x}\cdot\sin(x)\right)'$

Д) $\left(\frac{\sin(x)}{x^8}\right)'$; $\left(\frac{\ln(x)}{7^x}\right)'$; $\left(\frac{x}{tg(x)}\right)'$

Задача 2. Найти производную функции, заданной в виде многочлена

А) $(9x+2)'$ В) $(5x^2-2x+1)'$ С) $(8x^4-x^3+x^2-6x+7)'$

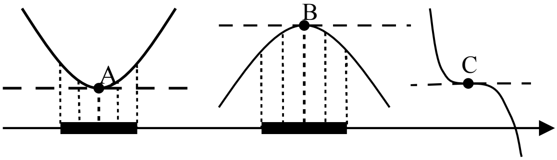
Задача 3. Найти производную дробно-рациональной функции

$$\left(\frac{5x+2}{7x^2-x+3}\right)'$$

1.5 Критические точки функции

Критическими точками функции называют точки, в которых производная равна нулю или не существует. Рассмотрим оба случая:

1. Производная функции *равна нулю,* $f'(x)=0$
Т.к, производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке, то производная равна нулю там, где тангенс угла наклона касательной равен нулю: $f'(x)=tg(\alpha)=0$. Известно, что тангенс нуля равен нулю $tg(0^o)=0$, т.е. *касательная должна быть горизонтальной*.

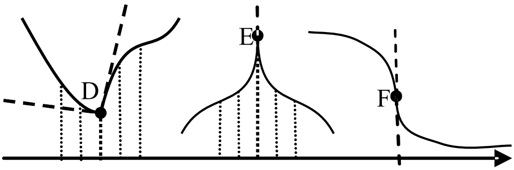


Точка А – точка максимума, имеет горизонтальную касательную
Точка В – точка минимума, имеет горизонтальную касательную
Точка С – точка перегиба с горизонтальной касательной

2. Производная *не существует* в двух случаях:

А) Производная $f'(x)$ *не существует* для тех точек, в которых касательная – вертикальная линия, т.е. угол наклона касательной по отношению к положительному направлению оси ОХ равен 90º. Т.к, производная функции в точке равна тангенсу угла наклона $f'(x)=tg(\alpha)$, а $tg(90^o)$- не существует, то, следовательно, производная не существует.

В) Производная $f'(x)$ *не существует* для тех точек, в которых можно провести

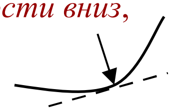


две касательные, т.е. нет однозначной производной. Представим эти точки на графике.
Точка **D** – это *угловая* точка, в этой точке можно построить две различные касательные.
Точка **E** – это точка *возврата*, в этой точке можно построить две касательные, которые сливаются в одну вертикальную касательную.
Точка **F** – это точка *перегиба* с вертикальной касательной

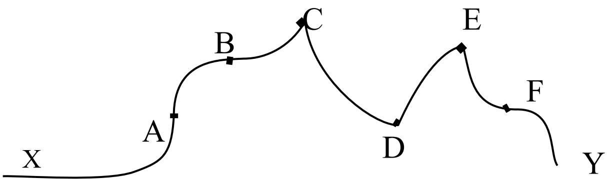
1.6 Выпуклость функции. Точки перегиба.

График функции на интервале имеет направление *выпуклости вверх*, если график функции располагается ниже касательной, проведенной в любой точке интервала

График функции на интервале имеет направление *выпуклости вниз*, если график функции располагается выше касательной, проведенной в любой точке интервала.



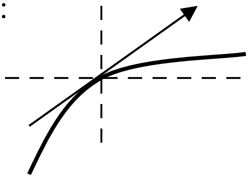
Точки перегиба – это точки, в которых меняется направление выпуклости.



Пример: Для рисунка имеем
Направление выпуклости вверх: (A;B), (D;E), (F,Y)
Направление выпуклости вниз: (X;A), (B;C), (C,D), (E,F)
A, B, D, E, F – точки перегиба.
Самостоятельно: *определить для рисунка, в каких точках производная равна нулю, а в каких не существует.*

1.7 Связь производной и монотонности

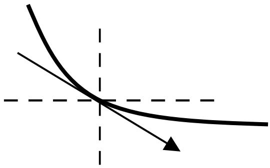
Теорема 1. Функция на интервале возрастает тогда и только тогда, когда производная на этом интервале положительна:



$$f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; f(x)\uparrow$$

Пояснение: Для возрастающей функции угол наклона касательной лежит в интервале от 0 до 90 градусов (I четверть), в этом интервале тангенс принимает только положительные значения, следовательно, производная тоже.

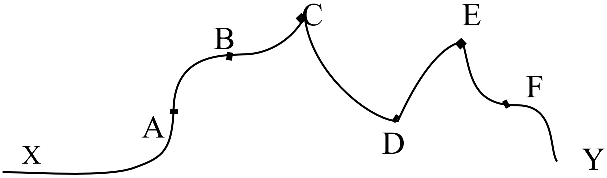
Теорема 2. Функция на интервале убывает тогда и только тогда, когда производная на этом интервале отрицательна:



$$f'(x)<0 \;\Leftrightarrow\; f(x)\downarrow$$

Пояснение: Для убывающей функции угол наклона касательной лежит в интервале от 270 до 360 градусов (IV четверть), в этом интервале тангенс принимает только отрицательные значения, следовательно, производная тоже.

***Самостоятельно**: для рисунка определить интервалы возрастания и убывания.*

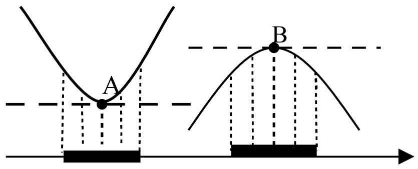


1.8 Точки экстремума

Точка *минимума* – это точка, в которой функция принимает наименьшее значение по сравнению со значениями функции в пределах некоторой окрестности этой точки.

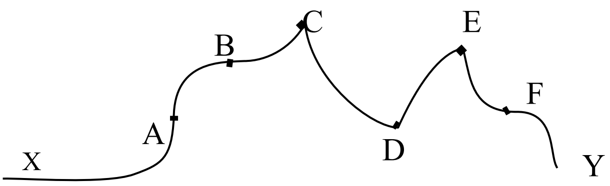
Точка *максимума* – это точка, в которой функция принимает наибольшее значение по сравнению со значениями функции в пределах некоторой окрестности этой точки .

Точки минимума и максимума называются *точками экстремуму.*



точка A – точка минимума.
точка B – точка максимума.
точки A и B – точки экстремума.

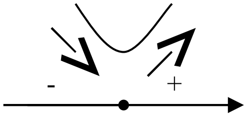
Пример: Определим по графику точки экстремума:



Точки максимума – C, E
Точки минимума - D

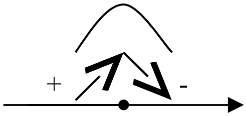
Замечание: Точки экстремума могут быть как гладкими, так и угловыми. Все вершины – это точки максимума, а все впадины – это точки минимума.

Теорема 3. Точка А - точка минимума тогда и только тогда, когда при переходе через точку А, производная функции меняет свой знак с минуса на плюс.



А

Теорема 4. Точка В - точка максимума тогда и только тогда, когда при переходе через точку В, производная функции меняет свой знак с плюса на минус.



В

1.9 Применение производной при исследовании функции и построения ее графика

Будем рассматривать функцию, заданную в виде многочлена *n-й* степени, которая определена на множестве всех действительных чисел от $-\infty$ до $+\infty$.

Пример:

$4x - 3$ - многочлен первой степени

$x^2 - 3x + 5$ - многочлен второй степени

$9x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 3$ - многочлен пятой степени

Этапы исследования функции:

1) найти производную функции
2) найти критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует
3) изобразить критические точки на числовом луче, и определить знаки производной на каждом интервале
4) воспользоваться теоремами 3 и 4 и определить точки экстремума.
5) построить график по базовым точкам

Рассмотрим пример исследования функции и построения ее графика

Задача 1. $y=3x-x^3$

1) $y'=3-3x^2$ – находим производную

2) $y'=0$ - приравниваем производную к нулю

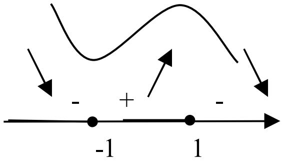
$3-3x^2=0$

$3(1-x^2)=0$

$1-x^2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$ – критические точки



3) Изобразим точки ± 1 на луче. Получили три интервала:

$(-\infty;-1)$ $(-1;1)$ $(1;+\infty)$

Найдем знак производной на каждом интервале, для этого берем произвольную точку на каждом интервале.

$y'(-2)=3-3\cdot(-2)^2=-9<0$, функция на интервале от $-\infty$ до -1 убывает

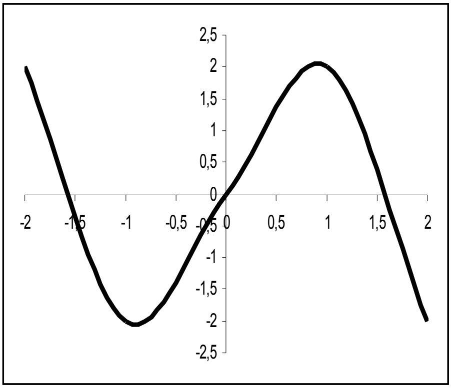
$y'(0)=3-3\cdot 0^2=3>0$, функция на интервале от -1 до 1 возрастает

$y'(2)=3-3\cdot 2^2=-9<0$, функция на интервале от 1 до $+\infty$ убывает

4) Определим точки экстремума:

$x=-1$ – точка минимума

$x=1$ – точка максимума

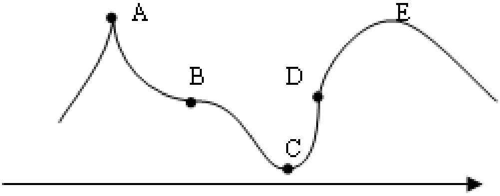


5) Поострим график по точкам

$y=3x-x^3$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	-2	0	2	-2

Задача 2. Дан график функции, указать, что за точки изображены на графике.



A - точка возврата и максимума

B – точка перегиба с горизонтальной касательной

C – точка минимума

D – точка перегиба с вертикальной касательной

E – точка максимума

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Исследовать и построить график функции

А) $y = x^2 - 6x + 2$

В) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x^2 - x + 3}$

Задача 2. Нарисовать график функции, которая имеет следующие критические точки:

А – точка максимума

В – точка перегиба с вертикальной касательной

С – точка минимума, которая является угловой

1.10 Сложная функция. Производная сложной функции.

Рассмотрим вопрос, как можно из двух простых функций построить сложную функцию. Например, возьмем две элементарные функции:

f(x)=sin(x) – тригонометрическая функция

$g(x) = \sqrt{x}$ - квадратичная функция

и построим из них сложную.

Опр. Функцию *y=f(g(x))* называют сложной, если областью определения функции *y=f(t)* является множество значений функции *t=g(x), т.е.* если аргументом функции *y=f(t)* является другая функция *t=g(x)*. При этом *y=f(t) называется внешней функцией, а t=g(x)внутренней функцией.*

Для выбранных функций мы получим сложную функцию $y = \sin(\sqrt{x})$.

Таким образом, одна функция оказалась внутри другой, для функции *f(x)* вместо х подставили *g(x)*.

Если в нашем примере поменять внешнюю и внутреннюю функцию местами, то мы получим следующую сложную функцию: $y = \sqrt{\sin(x)}$

Запишем несколько сложных функций и укажем для них внешнюю и внутреннюю функции:

$y = \cos^2(x)$

$f(t) = t^2$ - внешняя функция $t = g(x) = \cos(x)$ - внутренняя функция

$y = 5^{tg(x)}$

$f(t) = 5^t$ - внешняя функция $t = g(x) = tg(x)$ - внутренняя функция

Необходимо понимать, для того чтобы найти значение сложной функции, необходимо вначале обратиться к внутренней функции, а уж затем находить значение самой сложной функции.

Рассмотрим правило нахождения производной сложной функции:
Производная сложной функции y=f(g(x)) равна произведению производной внутренней функции на производную внешней функции: $y' = (f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(t)$

Пример: *y=tg(7x+4)*

y=f(t)=tg(t) – внешняя функция

t=g(x)=7x+4 – внутренняя функция

$$(tg(7x+4))' = (7x+4)' \cdot (tg(t))' = 7 \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} = 7 \cdot \frac{1}{\cos^2(7x+4)}$$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

Задача . Даны две элементарные функции *y=f(x)* и *y=g(x).* Построить две сложные функции *y=f(g(x))* и *y=g(f(x))*, найти их производные:

А) *f(x)=cos(x)*

$g(x) = \frac{1}{x}$

В) $f(x)=log_3 x$

$g(x) = x^5$

Глава 2. Интегрирование функции

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Возьмем некоторую функцию, например $f(x)=x^3$, и найдем ее производную

$$f'(x)=3x^2$$

Пусть теперь дана сама производная $f'(x)=6x^5$, наша задача состоит в том, чтобы восстановить исходную функцию $f(x)$, чья производная известна. Функция $f(x)$ будет выглядеть следующим образом $f(x)=x^6$
Проверка: $(x^6)'=6x^5$

Дифференцирование – это процесс нахождения производной.
Интегрирование – это обратная операция, процесс нахождения функции, зная ее производную.

Опр. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если производная $F(x)$ совпадает с $f(x)$: $F'(x)=f(x)$
Примеры:
$f(x)= 3x^2$ – производная для $F(x)= x^3$
$F(x)= x^3$ - первообразная для $f(x)= 3x^2$
$f(x)= 6x^5$ – производная для $F(x)= x^6$
$F(x)= x^6$ - первообразная для $f(x)= 6x^5$
Функция имеет не одну первообразную, а бесконечное множество первообразных. Пусть $F(x)= x^3$ - первообразная для $f(x)= 3x^2$, т.е. $(x^3)'=3x^2$
Тогда $F(x)= (x^3 +2)$ – тоже будет первообразной для $f(x)= 3x^2$, т.е. $(x^3+2)'=3x^2$

Т.к. производная константы равна нулю, то любая функция вида $F(x) +C$ будет являться первообразной для $f(x)$, где $C=const$, т.е. любое число.

Опр. Множество всех первообразных *F(x)+C*, где *C=const*, называется *неопределенным интегралом* для функции *f(x)* по переменной *x*. Записывается и читается это следующим образом:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ - интеграл функции *f(x)* по де *x*

f(x) – подынтегральная функция, dx – дифференциал переменной x

F(x) – первообразная, C – любое число

∫- знак интеграла

Пример: $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ $\int 6x^5 dx = x^6 + C$

2.2 Правила интегрирования и таблица основных интегралов

При нахождении производной мы имели право выносить коэффициент из-под знака производной и применяли правило, согласно которому производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных. Аналогичные правила справедливы и для интегрирования.

Правила интегрирования:

1. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

- коэффициент можно выносить из-под знака интеграла

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

- интеграл суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов.

На основании таблицы производных элементарных функций построим таблицу основных интегралов

Табличные интегралы:

$\int kdx = kx + c$

$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int \frac{1}{\ln a \cdot x} dx = \log_a x + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

$\int \cos x dx = \sin x + c$

$\int \sin x dx = -\cos x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$

Проверим одну из формул:

$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$ $\quad F(x) = \frac{x^2}{2}$ - первообразная $\quad f(x) = x$ - производная

По определению первообразной *F '(x)=f(x)*, т.е.

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$$

Самостоятельно: аналогично проверить все табличные интегралы.

2.3 Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов путем непосредственного использования таблицы простейших интегралов и правил интегрирования называется *непосредственным интегрированием*.

Задача 1. Используя таблицу интегралов элементарных функций, найти интегралы:

1) $\int 3dx = 3x + C$ $\qquad$ 2) $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$ $\qquad$ 3) $\int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C$

4) $\int \frac{1}{x \cdot \ln(7)} dx = \log_7 x + C$ 5) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg(x) + C$

Задача 2. Используя правила интегрирования, найти интегралы:

A) $\int 5 \cdot x^3 dx = 5 \cdot \int x^3 dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4}$ - коэффициент можно выносить из-под знака интеграла.

B) $\int (5 + \sin(x))dx = \int 5dx + \int \sin(x)dx = 5x - \cos(x) + C$ - интеграл суммы равен сумме интегралов

C) $\int (9x^3 - 2x^2 + 5x - 7)dx = 9 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + C$ - одновременно применяются два предыдущих правила

Метод подстановки

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет перейти к методу непосредственного интегрирования.
При введении новой переменной требуется нахождение дифференциала новой переменной по правилу:

$$t = \varphi(x)$$
$$dt = \varphi'(x)dx$$

$t = \varphi(x)$ - новая переменная

$\varphi'(x)$ - производная новой переменной

dt – дифференциал переменной t

dx - дифференциал переменной x

Задача 3.

$$\int (5 + x)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(5 + x)^4}{4} + C$$

$t = 5 + x$

$dt = (5 + x)' dx$

$dt = dx$

Задача 4.

$$\int \sin(x)\cdot\cos^3 x dx = \int -t^3 dt = -\frac{t^4}{4} = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$$

$t = \cos x$

$dt = (\cos x)' dx$

$dt = -\sin x dx$

$\sin x dx = -dt$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

A) $\int 7dx =$

B) $\int 2xdx =$

C) $\int x^5 dx =$

D) $\int 3x^7 dx =$

F) $\int (4x - 9)dx =$

G) $\int (2x^8 - x^3 + 4x^2 + 3x + 2)dx =$

Задача 2. Используя метод подстановки, вычислить:

A) $\int (2x+1)^5 dx =$

B) $\int \frac{1}{\cos^2 x} tgxdx =$

2.4 Определенный интеграл и его применение для вычисления площади криволинейной трапеции

Если *F(x)* - первообразная для функции *y=f(x)* на интервале (*a;b*), то определенный интеграл функции *f(x)* от *a* до *b* равен разности первообразных на концах интервала

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$\int_a^b f(x)dx$ - определенный интеграл

$F(b) - F(a)$ - разность первообразных

a- верхняя граница интегрирования

b – нижняя граница интегрирования

Примеры:

$$\int_3^5 9dx = 9x\Big|_3^5 = 9\cdot 5 - 9\cdot 3 = 45 - 27 = 18$$

$$\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

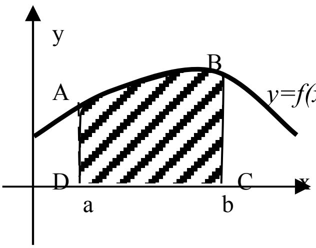
$$\int_1^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{6}) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

На интервале ($a;b$) рассмотрим произвольную функцию $y=f(x)$, которая располагается выше оси OX, т.е. $f(x)>0$.

Опр. *Криволинейной трапецией* будем называть фигуру, ограниченную графиком функции $y=f(x)$, осью OX и вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.

На рисунке изображена криволинейная трапеция ABCD.



Теорема: Площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу функции $y=f(x)$ на интервале ($a;b$)

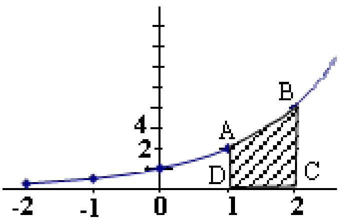
$$S_{кр.трап} = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Задача . На интервале от 1 до 2 для функции $y=2^x$ построить криволинейную трапецию и найти ее площадь.

<u>Решение.</u>

Найдем точки для построения графика функции

x	0	1	2	3	-1
$y=2^x$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^{-1}=\frac{1}{2}=0{,}5$



$$S_{ABCD} = \int_1^2 2^x dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{4-2}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти определенный интеграл

1) $\int_1^2 x^4 dx$ 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin(x) dx$ 3) $\int_1^3 x^6 dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

Задача 2. Построить криволинейную трапецию для функции у= x^2 на интервале от 1 до 2. Найти площадь криволинейной трапеции.

Список литературы

Алимов Ш. А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни).10—11 классы. — М., 2014.
Атанасян Л. С., *Бутузов В. Ф*., *Кадомцев С. Б. и др*. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М., 2014.
Башмаков М. И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. —М., 2014.
Башмаков М. И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
Башмаков М. И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
Башмаков М. И. Математика. Электронный учеб.-метод. комплекс для студ. Учреждений сред. проф. образования. — М., 2015.
Башмаков М. И. Математика (базовый уровень). 10 класс. — М., 2014.
Башмаков М. И. Математика (базовый уровень). 11 класс. — М., 2014.
Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа, геометрия. 10 класс. — М., 2013.
Башмаков М. И. Математика (базовый уровень). 11 класс. Сборник задач: учеб. пособие. — М., 2012.
Богомолов Н.В. Математика для ссузов - М. Дрофа, 2015
Богомолов Н.В. Сборник задач по математике _ М.: Дрофа, 2015.