КОМИТЕТ ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ
«ВОЛХОВСКИЙ АЛЮМИНИЕВЫЙ КОЛЛЕДЖ»

Методическое пособие по математике для студентов 1-2 курсов по теме «Степенная, показательная и логарифмическая функции»

Разработчик:
Фомина Елена Анатольевна
преподаватель математики и информатики

Волхов 2016 г

Степенная функция

Степень числа с произвольным показателем

$b = a^k$ **- читается *b* равно *a* в степени *k***

a – **основание степени**
k – **показатель степени**
b – **степень числа**

Определение степени зависит от показателя степени *k*

1. ***k* =0**, $b = a^k = a^0 = 1$ - любое число в нулевой степени равно 1

Пример: $8^0 = 1$; $4{,}38^0 = 1$; $\left(\frac{7}{9}\right)^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$

2. ***k* =1**, $b = a^1 = a$ - любое число *a* в первой степени равно самому числу *a*.

Пример: $8^1 = 8$; $4{,}38^1 = 4{,}38$; $\left(\frac{7}{9}\right)^1 = \frac{7}{9}$; $(-2)^1 = -2$

3. ***k* – *целое положительное число*, *k* =1, 2, 3 …**

Число *a* в целой положительной степени *k* равно произведению *k* одинаковых множителей, где каждый множитель равен *a*.

$$b = a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{k-\text{раз}}$$

Пример: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$0{,}3^4 = 0.3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0081$

$\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{125}{512}$

4. ***k* =-1**,

Опр. Два числа называются *взаимно-обратными*, если их произведение равно единице. Числа a и $\frac{1}{a}$ - взаимно-обратные, т.к. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Опр. Число a в минус первой степени равно числу, взаимно-обратному данному числу.

$$b = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Пример: $8^{-1} = \frac{1}{8}$; $4{,}38^{-1} = \frac{1}{4{,}38} = \frac{100}{438} = \frac{50}{219}$; $\left(\frac{7}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{7}$;

5. ***k*** *– целое отрицательное число,* ***k* =-1,- 2,- 3 …**

Число a в отрицательной степени равно числу, обратному числу a в положительной степени

$$b = a^{-k} = \frac{1}{a^k} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{k-\text{раз}}}$$

Пример: $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{32}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{125}{8}$

6. ***k*** – число представимое в виде дроби: $k = \frac{1}{n}$, где n =1, 2, 3 …

Опр. *Корнем n-й степени* из числа b, где b – число положительное, называют такое число a, n-я степень которого равна b:

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} = a \text{, если } a^n = b,\ b \geq 0$$

Пример: корень пятой степени - $\sqrt[5]{100000} = 10$, т.к. $10^5 = 1000000$

корень десятой степени - $\sqrt[10]{1024} = 2$, т.к. $2^{10} = 1024$

Основное свойство корня: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Пример. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Между корнем *n-й* степенью и степенью с дробным показателем $k = \frac{1}{n}$ существует зависимость, которая выражается формулой:

$$b = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Т.е. число *a* в дробной степени $k = \frac{1}{n}$ равно корню *n-й* степени из числа *a*.

Замечание: Квадратный корень из числа равен корню 2-й степени из числа: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Пример.

А) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$

В) $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

7. ***k* – число представимое в виде дроби**: $k = \frac{m}{n}$ - где *m, n* – натуральные числа (1,2,3…. – множество натуральных чисел)

Опр. *Степень числа a,* где *a* – число положительное, *с дробным показателем* $k = \frac{m}{n}$ - это корень *n-й* степени из выражения *a* в степени *m*:

$$b = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Пример.

$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \approx 2{,}1$ Проверка: $2{,}1^3 = 2{,}1 \cdot 2{,}1 \cdot 2{,}1 \approx 9{,}2$

Замечание. Если основание степени *a* – число положительное, то существует степень $b = a^k$ для любого показателя, т.е. *k* – любое действительное число, как рациональное, так и иррациональное. Обоснование этого факта дается через теорию пределов в разделе высшей математики.

Свойства степеней

Изученные ранее в школьном курсе математики свойства степеней справедливы для любого показателя.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ - *при перемножении двух степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются*: $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ - *при делении двух степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются*: $\dfrac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$

3) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ - *при возведении степени в степень показатели перемножаются*:

$$(a^3)^2 = a^{3\cdot 2} = a^6$$

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ - *при возведении произведения в степень, каждый множитель возводится в эту степень*: $(a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ - *при возведении дроби в степень, числитель и знаменатель возводятся в эту степень*: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$

Задача Упростить:

А)

$$\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{a^2 \cdot b^7}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^3 \cdot b^2}{a^2 \cdot b^7} \cdot \frac{a^4}{b^4} = \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot a^4}{a^2 \cdot b^7 \cdot b^4} = \frac{a^{3+4} \cdot b^2}{a^2 \cdot b^{7+4}} =$$

$$\frac{a^7 \cdot b^2}{a^2 \cdot b^{11}} = a^{7-2} \cdot b^{2-11} = a^5 \cdot b^{-9} = a^5 \cdot \frac{1}{b^9} = \frac{a^5}{b^9}$$

B)

$$\frac{a^{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt[7]{a^2}}{a^{-2} \cdot a^3} = \frac{a^{\frac{3}{7}} \cdot a^{\frac{2}{7}}}{a^{-2+3}} = \frac{a^{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}}}{a^1} = \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^1} = a^{\frac{5}{7}-1} = a^{\frac{5}{7}-\frac{7}{7}} = a^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}}$$

C)

$$\left(\sqrt[9]{a^7}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} = \left(a^{\frac{7}{9}}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{7}{9}\cdot 3} \cdot a^{\frac{\frac{2}{3}}{4}} = a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{7}{3}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{15}{6}} =$$

$$a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2\sqrt{a}$$

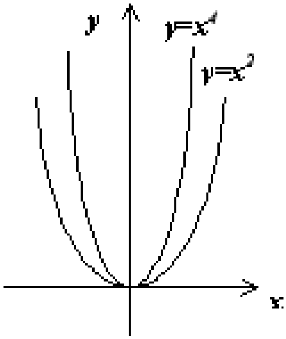
Степенная функция, ее свойства и график

Опр. Функция вида $y=x^n$, где n – любое число называется *степенной функцией*.

Примеры: $y=x^2$ $y=x^3$ $y=x^{-4}$ $y=x^{\frac{1}{3}}$

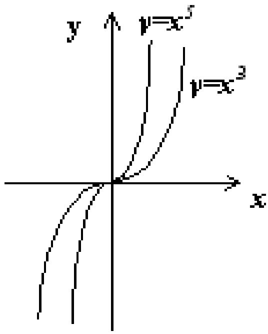
Свойства степенной функции и ее график зависят от показателя степени n.

1. ***n – положительное четное число.***
Примеры: $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^{10}$.
Графиком функции служит парабола, симметричная относительно оси OY.



Свойства функции:
Df – область определения: x – любое число от -∞ до +∞
Ef – множество значений функции: y может принимать только неотрицательные значения [0;+∞)
Функция немонотонная, ограничена снизу, четная, непрерывная.

2. ***n– положительное нечетное число.***
Примеры: $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^{13}$.
Графиком функции служит парабола, симметричная относительно начала координат.



Свойства функции:
Df – область определения: x – любое число от -∞ до +∞
Ef – множество значений функции: y - любое число от -∞ до +∞
Функция возрастающая, неограниченная, нечетная, непрерывная.

3. ***n – отрицательное четное число***

Примеры: $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

$y=x^{-4}$, $y=x^{-10}$.

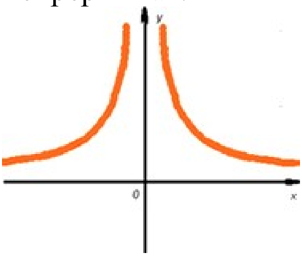
Графиком функции служит кривая, симметричная относительно оси OY.

Свойства функции:

Df – область определения: *x* – любое число неравное нулю, $x \neq 0$

Ef – множество значений функции: *y* – $(0;+\infty)$

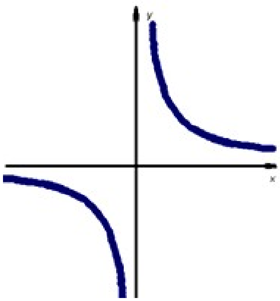
Функция немонотонная, ограничена снизу, четная, не является непрерывная.



4. ***n–отрицательное нечетное число***

Примеры: $y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ $y=x^{-5}$, $y=x^{-13}$.

Графиком функции служит кривая, симметричная относительно начало координат.



Свойства функции:

Df – область определения: *x* – любое число, не равное нулю, $x \neq 0$

Ef – множество значений функции: *y* – любое число, не равное нулю, $y \neq 0$

Функция убывающая, неограниченная, нечетная, не является непрерывная.

5. ***n – в виде дроби, числитель которой равен единице, а знаменатель – положительное четное число***

Примеры: $y = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

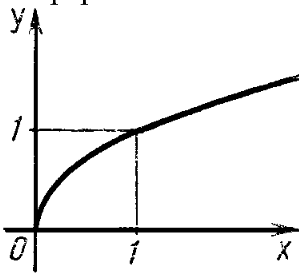
Графиком функции служит кривая, расположенная в первом координатном углу.

Свойства функции:

Df – область определения: *x* – любое неотрицательное число [0;+∞)

Ef – множество значений функции: *y* – любое неотрицательное число [0;+∞)

Функция возрастающая, ограничена снизу, общего вида, непрерывная.



6. ***n – в виде дроби, числитель которой равен единице, а знаменатель – положительное нечетное число***

Примеры: $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ $y = x^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x}$

Область определения этой функции – множество всех чисел

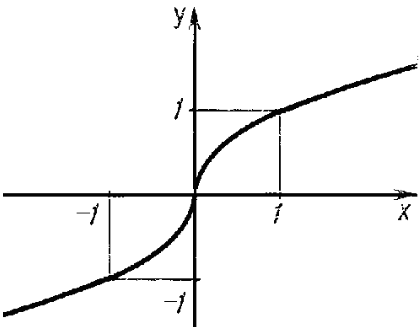
Графиком функции служит кривая, симметричная относительно начало координат.

Свойства функции:

Df – область определения: *x* – любое число (-∞;+∞)

Ef – множество значений функции: *y* любое число (-∞;+∞)

Функция возрастающая, неограниченная, нечетная, непрерывная.



Степенные уравнения

Опр. Уравнения вида $x^n=b$ называется *степенным*.
Решение степенного уравнения зависит от показателя n.

1. ***n*** – *число четное*, n=2, 4, 6…

$$x^n = b$$
$$x = \pm\sqrt[n]{b}$$

Задача 1. $x^4 = 81$, $x = \pm\sqrt[4]{81}$, $x = \pm\sqrt[4]{3^4}$, $x = \pm 3$

Задача 2. $x^8 = 201$, $x = \pm\sqrt[8]{201}$, $x \approx \pm 1{,}9$

Задача 3. $(x-5)^6 = 70$, $x - 5 = \pm\sqrt[6]{70}$, $x = \pm\sqrt[6]{70} + 5$, $x \approx \pm 2{,}1 + 5$

2. ***n*** – *число нечетное*, n=1, 3, 5…

$$x^n = b$$
$$x = \sqrt[n]{b}$$

Задача 4. $x^3 = 125$, $x = \sqrt[3]{125}$, $x = \sqrt[3]{5^3}$, $x = 5$

Задача 5. $x^7 = 21$, $x = \sqrt[7]{21}$, $x \approx 1{,}7$

Задача 6. $(x+2)^5 = 100$, $x + 2 = \sqrt[5]{100}$, $x = \sqrt[5]{100} - 2$, $x \approx 2{,}5 - 2 = 1{,}5$

Задачи для самостоятельного решения

1.Вычислить: $7^6;\ \left(\frac{2}{5}\right)^4;\ 0{,}2^5;\ (-8)^5;\ (-3)^4$

2. Вычислить: $8^{-1};\ 6^{-3};\ \left(\frac{1}{9}\right)^{-1};\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-2};\ \left(\frac{7}{5}\right)^{-3};\ 0{,}3^{-5}$

3. Вычислить: $\sqrt{169};\ \sqrt[7]{128};\ 729^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[4]{\frac{81}{625}};\ 4^{\frac{7}{5}}$

4. Вычислить $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} + 9^0 + \sqrt{576}$

5. Упростить: $\left(\frac{a^4 \cdot b^2}{a^5 \cdot b^3}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5$

Показательная функция

Показательная функция, ее график и свойства

Опр. Функция вида $y=a^x$, где a – любое положительное число не равное 1, $a>0$ и $a\neq 1$, x – любое действительное число, называется *показательной функцией*.

Примеры: $y=2^x$ $y=0,3^x$ $y=10^x$

Свойства показательной функции и ее график зависят от основания степени a. Рассмотрим два случая:

1-й случай: $0<a<1$.

Проследим свойства функции на примере функции

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Составим таблицу значений функции и построим график.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$

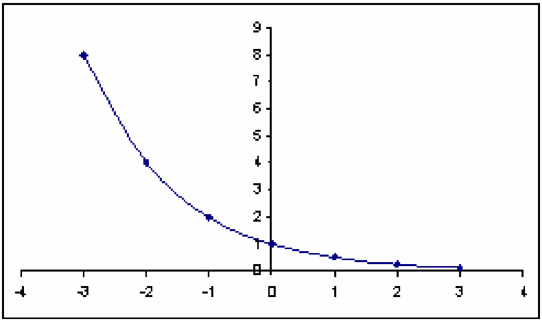
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2^1=2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$



Свойства функции $y=a^x$, $0<a<1$

1. $D_f = R$- область определения совпадает со множеством всех действительных чисел.

$E_f=(0;+\infty)$ – множество значений функции

2. Свойство монотонности – функция убывающая
3. Свойство ограниченности – функция ограничена снизу
4. Свойство симметрии – функция общего вида
5. Функция непериодическая
6. Функция непрерывная
7. Пределы функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

2-й случай: $a>1$.

Проследим свойства функции на примере функции $y=2^x$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$Y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

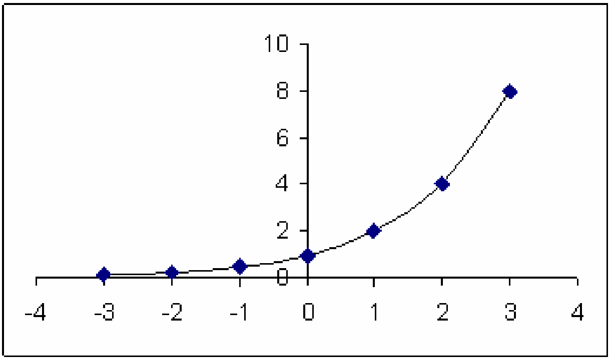
$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$2^0=1$

$2^1=2$

$2^2=4$

$2^3=8$



Свойства функции $y=a^x$, $a>0$

1. $D_f = R$- область определения совпадает со множеством всех действительных чисел.

$E_f = (0; +\infty)$ – множество значений функции

2. Свойство монотонности – функция возрастающая
3. Свойство ограниченности – функция ограничена снизу
4. Свойство симметрии – функция общего вида
5. Функция непериодическая
6. Функция непрерывная
7. Пределы функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

Среди показательных функций существует особая функция $y=e^x$, которая называется *экспоненциальной*. Число *e* – называется *экспонентой*, ее приближенное значение - $e \approx 2,7$.

Вывод:

Если основание степени *a* показательной функции меньше единицы $0 < a < 1$, то функция $y=a^x$ убывает.

Если основание степени *a* показательной функции больше единицы $a > 1$, то функция $y=a^x$ возрастает.

Свойства показательной функции следует учитывать при решении показательных неравенств.

Показательные уравнения

Опр. *Показательным уравнением называют уравнение вида* $a^{f(x)} = b$, где *a>0, b>0, a≠1 , f(x)- выражение, содержащее переменную x*

Пример: $2^x = 32$, *a=2, f(x)=x*

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 125, a=\frac{1}{5}, f(x)=x-1$$

Рассмотрим основной способ решения показательных уравнений. Необходимо показательное уравнение свести к уравнению вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и приравнять показатели *f(x)=g(x)* степеней.

Задача 1. $2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$x=5$

Задача 2.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 125$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 5^3$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

x-1=-3

x=-3+1

x=-2

Задача 3.

$2^x = 3^x$

Разделим левую и правую часть на выражение 3^x

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad x=0$$

Задача 4.

$$4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$$

$$(2^x)^2 - 5\cdot 2^x + 4 = 0$$

Введем новую переменную $t=2^x$ и решим квадратное уравнение

$$t^2 - 5\cdot t + 4 = 0$$

$$D = 9$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 4$$

$t_1=0$ - $2^x = 1$, $2^x = 2^0$, $x = 0$

$t_2=4$ - $2^x = 4$, $2^x = 2^2$, $x = 2$

Показательные неравенства

Опр. Неравенства вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, где $a>0$ и $a\neq 1$, *f(x) и g(x) - выражения, содержащие переменную x* , называются показательными.

Пример: $3^x > 3^5$, $a=3$, $f(x)=x$, $g(x)=5$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{6x+7}, a=\frac{1}{5}, f(x)=x-1, g(x)=6x+7$$

Замечание. Вместо знака неравенства < может стоят любой знак неравенства, т.е. >, ≥, ≤

Решение неравенства вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ зависит от основания степени *a*.

Если ***a*>1**, то не меняем знак неравенства при сравнении показателей, т.к. функция возрастающая, и большему *x* соответствует больший $y= a^x$. Переходим к неравенству:

$$f(x)<g(x)$$

Если **0< *a*<1**, то меняем знак неравенства при сравнении показателей, т.к. функция убывающая, и большему *x* соответствует меньший $y= a^x$. Переходим к неравенству:

$$f(x)>g(x)$$

Задача. Решить показательные неравенства

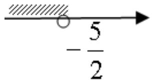
А) $4^{3x-2} > 4^{5x+3}$

a=4>1 – знак неравенства не меняем

$3x-2>5x+3$

$3x-5x>3+2$

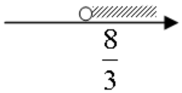
$-2x>5$ (:-2<0, знак неравенства меняем)



$x<-\dfrac{5}{2}$

Ответ: (-∞;-5/2)

В) $0{,}8^{5x+5} > 0{,}8^{8x-3}$



a=0,8<1 – знак неравенства меняем

$5x+5<8x-3$

$5x-8x<-3-5$

$-3x<-8$ (:-3<0, знак неравенства меняем)

$x>\dfrac{8}{3}$

Ответ: (8/3;+∞)

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить графики функций и указать их свойства

А) $y = 5^x$ В) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

2. Решить уравнение: $7^x = 343$

3. Решить неравенство: А) $2^{4x-3} < 2^{9x2}$ В) $0{,}4^{7x-3} < 0{,}4^{9x+1}$

Вопросы

1. Почему в определении корня n-й степени из числа b $\sqrt[n]{b} = a$, добавлено требованием, чтобы число b было положительным?
2. Экспоненциальная функция $y=e^x$ будет возрастающей или убывающей?
3. Почему в определении п*оказательного уравнения* $a^{f(x)} = b$ на числа a и b *накладываются условия: a>0, b>0, a≠1?*

Логарифмическая функция

Понятие логарифма

Нам известно определение степени положительного числа для произвольного показателя.

$$b = a^k \quad \begin{cases} a \text{ – основание степени} \\ k \text{ – показатель степени} \\ b \text{ – степень числа} \end{cases}$$

Пример:

Рассмотрим операцию, которая позволяет, зная основание степени a и саму степень b, найти показатель степени k.

Опр. ***Логарифмом числа b по основанию a***, где $a>0$ и $a\neq 1$, называют такое число k, в которое необходимо возвести основание a, чтобы получить число b.

$\log_a b = k$ - логарифм числа b по основанию a равно k.

b – называется выражением, которое стоит под знаком логарифма

a – основание логарифма

Пример.

$8 = 2^3$ - $\log_2 8 = 3$;

$81 = 3^4$ - $\log_3 81 = 4$;

$\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ - $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = 2$

Для того чтобы логарифм $\log_a b = k$ имел смысл, будем рассматривать только положительные и не равные единице основания логарифмов: $a>0$ и $a\neq 1$

Свойства логарифма

$$\log_a b = k$$

1. Основание логарифма a – *число положительное и не равно единице*: $a>0$ и $a\neq1$
   Выражение b , стоящее под знаком логарифма, всегда *больше нуля*, т.к. при возведении положительного числа a в любую степень, получается всегда положительное число: $b>0$
   Число k может принимать любое значение.

2. $\log_a 1 = 0$, т.к. $a^0 = 1$

3. $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

4. $\log_a a^k = k$ - основное логарифмическое тождество

Примеры:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$$

$$\log_2 \sqrt[5]{2^7} = \log_2 2^{\frac{7}{5}} = \frac{7}{5}$$

5. Логарифм по основанию 10 называется **десятичным**: *$log_{10}x=lgx$*
$lg1000= lg10^3=3$

6. Логарифм по основанию *e* называется **натуральным**: *$log_ex=lnx$*
$e\approx2,7$ - экспонента

7. Логарифм произведения равен сумме логарифмов

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Это свойство справедливо, т.к. понятие логарифма связано с понятием степени, а нам известно правило, согласно которому при перемножении двух степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Доказательство:

$\log_a b = n$

$b = a^n$

$\log_a c = m$

$c = a^m$

$\log_a (b \cdot c) = k$

$a^k = b \cdot c = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^k = a^{n+m}$

$k = n + m$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Пример использования формулы:

$\log_4 2 + \log_2 512 = \log_4 (2 \cdot 512) = \log_4 1024 = \log_4 4^5 = 5$

8. Логарифм дроби равен разности логарифмов

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Это свойство справедливо, т.к. понятие логарифма связано с понятием степени, а нам известно правило, согласно которому при делении двух степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Формулу доказать самостоятельно!

Пример использования формулы:

$\log_6 432 - \log_6 2 = \log_6 \frac{432}{2} = \log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$

9. Показатель степени, стоящей под знаком логарифма, можно выносить из-под знака логарифма. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Вопрос: *На основании какого свойства степени справедливо данное свойство логарифма?*

Пример использования формулы:

$3 \cdot \log_8 2 = \log_8 2^3 = \log_8 8 = 1$

Задача: применяя правила, упростить выражение.

$4 \cdot \log_9 a + 5 \cdot \log_9 a^2 - 7 \cdot \log_9 a^3 = \log_9 a^4 + \log_9 a^{10} - \log_9 a^{21} =$

$= \log_9 (a^4 \cdot a^{10}) - \log_9 a^{21} = \log_9 \dfrac{a^4 \cdot a^{10}}{a^{21}} = \log_9 \dfrac{1}{a^7} = \log_9 a^{-7} = -7 \cdot \log_9 a$

10. Правило перехода к новому основанию логарифма

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$\log_{64} 1024 = \dfrac{\log_2 1024}{\log_2 64} = \dfrac{\log_2 2^{10}}{\log_2 2^6} = \dfrac{10}{6}$ - переход к основанию a=2

$\log_{100} 10000000 = \dfrac{\lg 10000000}{\lg 100} = \dfrac{\lg 10^7}{\lg 10^2} = \dfrac{7}{2}$ - переход к основанию a=10

Логарифмическая функция, ее график и свойства

Опр. Функция вида $y = \log_a x$, где основание логарифма a - положительное и не равное единице число: $a>0$ и $a\neq 1$, называется ***логарифмической функцией***.
Свойства логарифмической функции и ее график зависят от основания логарифма, числа a. Рассмотрим два случая:

1-й случай: 0< a<1.

Проследим свойства функции на примере

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad a = \frac{1}{2}$$

Составим таблицу значений функции и построим график

X	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$$

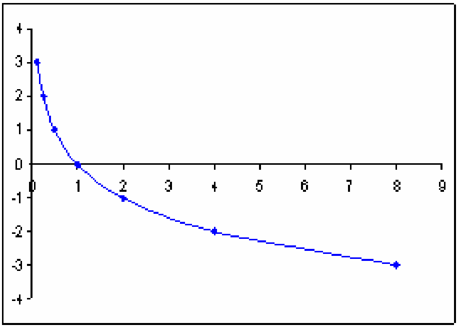
$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2^1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 3$$



Свойства функции $y=\log_a x$, $0< a<1$

1. $D_f=(0;+\infty)$ - область определения
   E_f — множество значений функции совпадает со множеством всех действительных чисел.
2. Свойство монотонности – функция убывающая
3. Свойство ограниченности – функция неограниченная
4. Свойство симметрии – функция общего вида
5. Функция непериодическая
6. Функция непрерывная
7. Пределы функции:

$$\lim_{x\to 0} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = -\infty$$

2-й случай: ***a*>1.**

Проследим свойства функции на примере функции $y=\log_2 x$, $a=2$

X	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$$

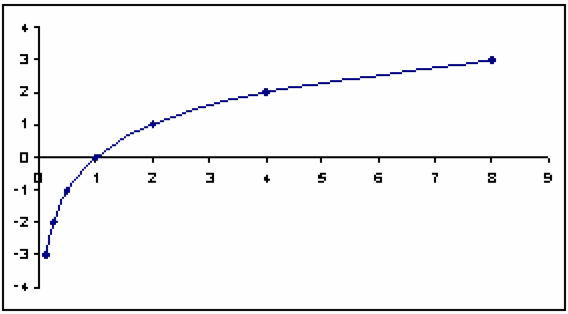
$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2 \ \log_2 \frac{1}{2} == \log_2 2^{-1} = -1$$

$$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$$

$$\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 8$$



Свойства функции $y=log_a x$, $a>1$

1. $D_f=(0;+\infty)$ - область определения

$E_f=$— множество значений функции совпадает со множеством всех действительных чисел.

2. Свойство монотонности – функция возрастающая
3. Свойство ограниченности – функция неограниченная
4. Свойство симметрии – функция общего вида
5. Функция непериодическая
6. Функция непрерывная
7. Пределы функции:

$$\lim_{x\to 0} a^x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty$$

Вывод:

Если основание a логарифмической функции меньше единицы $0<a<1$, то функция $y=log_a x$ убывает.

Если основание a логарифмической функции больше единицы $a>1$, то функция $y=log_a x$ возрастает.

Свойства логарифмической функции следует учитывать при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

$$\log_3 1;\ \log_9 9;\ \log_7 343;\ \log_8 \frac{1}{8};\ \log_2 \frac{1}{512};\ \log_6 \sqrt{6};\ \log_3 \sqrt[7]{3^5};\ \lg 100$$

2. Применить правила логарифмирования

$$1)\log_9 \frac{b}{c\cdot d}\quad 2)\log_7(b^4\cdot c^{11})\quad 3)\log_2 \frac{b^3\cdot d^2}{c^9}\quad 4)\ 2\cdot\log_9 a-3\cdot\log_9 b+7\cdot\log_9 d$$

$$5)\ \log_8 2+\log_8 2048\quad 6)\ \log_4 512-\log_4 8$$

3. Перейти к новому основанию

1) $a=3$ $\log_{81} 243$ 2) $a=10$ $\log_{1000} 100000$ 3) $a=5$ $\log_{\sqrt[3]{5}} 125$

4. Построить графики функций и указать их свойства

А) $y = \log_5 x$ В) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

Логарифмические уравнения

Опр. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании, называется ***логарифмическим уравнением***.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a f(x) = n$$

где $f(x)$ – выражения, содержащие переменную x.

Если $a > 0$, $a \neq 1$, уравнение при любом действительном n имеет единственное решение $f(x) = a^n$.

Пример: $\log_3 x = 2$

$x = 3^2 = 9$

Опр. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$ называется *логарифмическим уравнением*, при этом $f(x)$ и $g(x)$ – выражения, содержащие переменную x.

Учитывая непрерывность функции логарифма и тот факт, что выражения, стоящие под знаком логарифма, всегда больше нуля, верно следующее **утверждение**:

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Пример: $\log_3 x = \log_3 (4-x)$

$$\begin{cases} x = 4 - x \\ x > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4 \\ x > 0 \\ 4 > x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ 2 > 0 \\ 4 > 2 \end{cases}$$

Ответ: $x=2$

Способы решения логарифмических уравнений

Приведем основные способы решения логарифмических уравнений.

I. *Использование определения логарифма*

$$\log_a f(x) = n$$

$$f(x) = a^n$$

Задача 1. Решить уравнения

$\log_3 \dfrac{x-3}{x+3} = 1$ По определению логарифма

$\dfrac{x-3}{x+3} = 3^1$ $\quad \dfrac{x-3}{x+3} = 3$ $\quad \dfrac{x-3}{x+3} - 3 = 0$ $\quad \dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{3x+9}{x+3} = 0$

$\dfrac{x-3-3x-9}{x+3} = 0$ $\quad \dfrac{-2x-12}{x+3} = 0$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, т.е.

$-2x-12=0 \quad x=-6, \quad x+3=-6+3=-3\neq 0$

Ответ: $x=-6$

II. *Использование свойств логарифма*

- $y=\log_a x$ – непрерывная функция, область определения которой – множество положительных чисел
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Задача 2. Решить уравнения

$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24)$

$\log_3(x \cdot (x + 3)) = \log_3(x + 24)$

$\log_3(x^2 + 3x) = \log_3(x + 24)$

$x^2 + 3x = x + 24$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$D=100 \quad x_1=-6 \quad x_2=4$

Подставим найденные значения в область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x + 24 > 0 \end{cases}$$

$x_1=-6$ $\begin{cases} -6 > 0 \\ -6 + 3 > 0 \\ -6 + 24 > 0 \end{cases}$ $x_2=4$ $\begin{cases} 4 > 0 \\ 4 + 3 > 0 \\ 4 + 24 > 0 \end{cases}$

Проверка показывает, что число -6 не удовлетворяет систем, а число 4 удовлетворяет системе допустимых значений.
Ответ: $x=4$

III. Метод подстановки

В некоторых случаях логарифмическое уравнение можно свести к алгебраическому уравнению относительно новой переменной.
Задача 3. Решить уравнения $lg^2x - 3lgx + 2 = 0$
Введет подстановку $t= lgx$ и запишем уравнение
$t^2- 3t + 2 = 0$
Решая квадратное уравнение, получим D=1; $t_1=2$; $t_2=1$
$t_1=\lg x=2$
$x=10^2=100$
$t_2= \lg x=1$
$x=10^1=10$
Ответ: $x=100$, $x=10$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить логарифмические уравнения

$\log_6 x = 4$ $\log_{\frac{5}{4}} x = 2$ $\log_3(8x) = -5$ $\log_2(x+4) = \frac{3}{7}$ $\log_7(\frac{3x-2}{5-x}) = 1$

2. Решить логарифмические уравнения

A) $\log_5(x^5) = \log_5 32$

B) $\log_9(x^2) = \log_9(4-3x)$

3. Решить логарифмические уравнения

A) $log_4(x^2 - 4x + 1) - log_4(x^2 - 6x + 5) = -{}^1/_2$

B) $log_2 x + log_3 x = 1$,

C) $2log_3(x - 2) + log_3(x - 4)^2 = 0$,

D) $lg^2 100x + lg^2 10x + lgx = 14$

Логарифмические неравенства

Опр. Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании называется ***логарифмическим неравенством***.

Примеры:

A) $\log_6 x < 4$

B) $\log_2(6x - 7) \geq \log_2 4$

В процессе решения логарифмических неравенств используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

При сравнении выражений, стоящих под знаком логарифма, знак неравенства не меняется.

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

При сравнении выражений, стоящих под знаком логарифма, знак неравенства меняется.

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0, h(x) \neq 1 \end{cases}$$

Подчеркнем, что в неравенстве $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ вместо знака $>$ может фигурировать любой из знаков $\geq$, $<$, $\leq$.

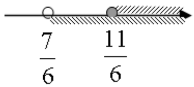
Рассмотрим решение задач

Задача 1. $\log_2(6x - 7) \geq \log_2 4$

Основание логарифма a=2.

a=2>1– знак неравенства не меняем. Учитываем, что выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть больше нуля. Запишем систему:

$$\begin{cases} 6x - 7 \geq 4 \\ 6x - 7 > 0 \end{cases} \begin{cases} 6x \geq 4 + 7 \\ 6x > 7 \end{cases} \begin{cases} 6x \geq 11 \\ 6x > 7 \end{cases} \begin{cases} x \geq \dfrac{11}{6} \\ x > \dfrac{7}{6} \end{cases}$$



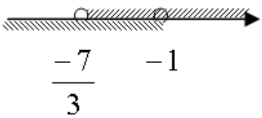
Ответ: $[\frac{11}{6};+\infty)$

Задача 2. $\log_{0,7}(3x + 7) > \log_{0,7} 4$

Основание логарифма a=0,7.

a=0,7<1– знак неравенства меняем. Учитываем, что выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть больше нуля. Запишем систему:

$$\begin{cases} 3x + 7 < 4 \\ 3x + 7 > 0 \end{cases} \begin{cases} 3x < 4 - 7 \\ 3x > -7 \end{cases} \begin{cases} 3x < -3 \\ 3x > -7 \end{cases} \begin{cases} x < \dfrac{-3}{3} \\ x > \dfrac{-7}{3} \end{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x > \dfrac{-7}{3} \end{cases}$$



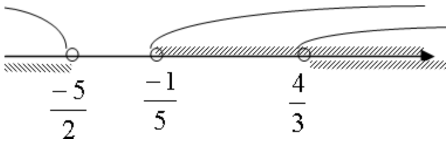
Ответ: $(\frac{-7}{3};-1)$

Задача 3. $\log_{\frac{2}{7}}(5x+1) > \log_{\frac{2}{7}}(3x-4)$

Основание логарифма $a=\dfrac{2}{7}$

$a=\dfrac{2}{7}<1$ – знак неравенства меняем. Учитываем, что выражения, стоящие под знаком логарифма, должны быть больше нуля. Запишем систему:

$$\begin{cases} 5x+1<3x-4 \\ 5x+1>0 \\ 3x-4>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-3x<-4-1 \\ 5x>-1 \\ 3x>4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x<-5 & :2 \\ 5x>-1 & :5 \\ 3x>4 & :3 \end{cases} \quad \begin{cases} x<\dfrac{-5}{2} \\ x>\dfrac{-1}{5} \\ x>\dfrac{4}{3} \end{cases}$$



Для ответа необходимо найти пересечение всех трех интервалов.
Ответ: пустое множество, т.к.интервалы не пересекаются

Задачи для самостоятельного решения

Задание: Решить неравенства

1. $\log_6 x < 4$ 2. $\log_3(7x-6) \geq \log_3 2$ 3. $\log_{0,6}(2x-1) \geq \log_{0,6} 5$

4. $\log_2(2x-3) > \log_2(x+6)$

Вопросы

1. Придумать логарифм, который бы равнялся следующим числам: 0, 1, -1, -3, 5, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{2}{3}$
2. Функция *y=ln(x)* будет возрастающей или убывающей?
3. Функция *y=lg(x)* будет возрастающей или убывающей?
3. Почему в определении логарифма требуют, чтобы основание логарифма было числом положительным и не равным нулю*: a>0, , a≠1?*