

КОМИТЕТ ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ
«ВОЛХОВСКИЙ АЛЮМИНИЕВЫЙ КОЛЛЕДЖ»

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ТЕМЕ «ТРИГОНОМЕТРИЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА
ДИСЦИПЛИНА
МАТЕМАТИКА**

Разработчик:
Фомина Елена Анатольевна
преподаватель математики и информатики

Волхов 2016г.

Учебное пособие разработано в соответствии с примерной рабочей программой по математике для 1 курса СПО. В пособии приведено краткое изложение теоретических вопросов темы «Тригонометрия»; разбираются решения базовых задач; предлагаются задачи для самостоятельного решения, тесты и список литературы.

Рассмотрена и одобрена
цикловой комиссией
математических и общих естественно-
научных дисциплин и специальности
18.02.03 «Химическая технология
неорганических веществ»
Протокол № 4 от «09» декабря 2016 г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УР
_____ Т.М.Рябина
« ____ » _____ 2016 г.

Председатель математических и общих
естественно-научных дисциплин

_____ Борошневa Н.В.

Организация-разработчик: ГБПОУ ЛО
«Волховский алюминиевый колледж»

Разработчик:

Фомина Е.А., преподаватель ГБПОУ ЛО «Волховский алюминиевый колледж»

Содержание

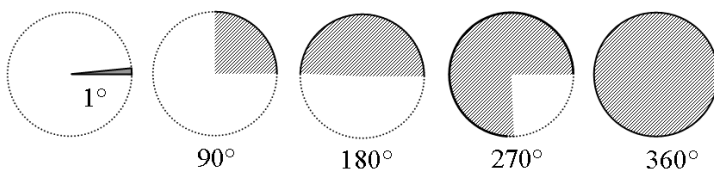
<u>Градусная и радианная мера угла.....</u>	<u>4</u>
<u>Единичная окружность.....</u>	<u>6</u>
<u>Тригонометрические функции.....</u>	<u>9</u>
<u>Знаки тригонометрических функций.....</u>	<u>10</u>
<u>Табличные значения тригонометрических функций.....</u>	<u>11</u>
<u>Основное тригонометрическое тождество.....</u>	<u>12</u>
<u>Тригонометрические формулы.....</u>	<u>14</u>
<u>Тригонометрические функции для отрицательного угла.....</u>	<u>14</u>
<u>Формула приведения.....</u>	<u>15</u>
<u>Тригонометрические функции суммы и разности углов.....</u>	<u>17</u>
<u>Тригонометрические функции двойного аргумента.....</u>	<u>18</u>
<u>Свойства и графики тригонометрических функций.....</u>	<u>22</u>
<u>Функция косинус - $y=\cos(x)$.....</u>	<u>23</u>
<u>Функция тангенс $y=\operatorname{tg}(x)$</u>	<u>25</u>
<u>Функция котангенс $y=\operatorname{ctg}(x)$.....</u>	<u>27</u>
<u>Преобразования графиков тригонометрических функций.....</u>	<u>29</u>
<u>Обратные тригонометрические функции.....</u>	<u>34</u>
<u>Тригонометрические уравнения.....</u>	<u>36</u>
<u>Тест по теме «Тригонометрия».....</u>	<u>41</u>

ТРИГОНОМЕТРИЯ

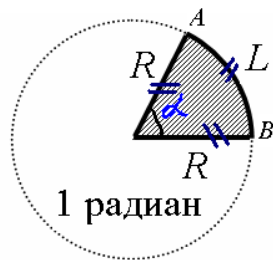
Градусная и радианная мера угла

Из школьного курса математики известно, что углы измеряются в градусах.

Опр. Угол в 1° соответствует $\frac{1}{360}$ части окружности.



Если взять окружность определенного радиуса, то любому центральному углу α окружности соответствует дуга AB . Зафиксируем такой центральный угол, для которого длина дуги AB будет равна радиусу окружности: $R = L$



Опр. Угол в 1 радиан – это угол, для которого длина соответствующей ей дуги равна радиусу окружности.

$$\alpha = 1 \text{ радиан}$$

Как величина угла в 1° не зависит от радиуса окружности, так и величина угла в 1 радиан не зависит от радиуса окружности.

Вспомним формулу длины окружности

$$C = 2\pi R$$

Длине окружности $C = 2\pi R$ соответствует угол в 360° . Узнаем, сколько радиан в целой окружности, т.е. в 360° . Составим пропорцию, в которой слева записана длина дуги, а справа угол в радианах.

$$L = R - 1 \text{ радиан}$$

$$C = 2\pi R - - x \text{ радиан}$$

$$\frac{R}{1} = \frac{2\pi R}{x}$$

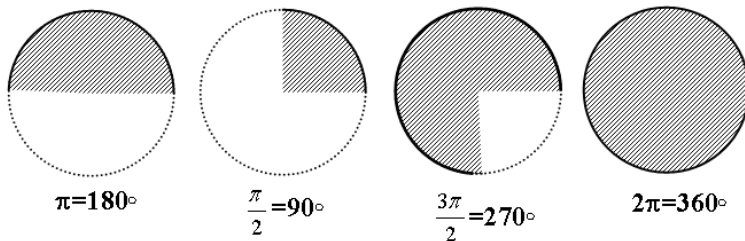
$$Rx = 2\pi R$$

$$x = 2\pi$$

Т.о. углу 360° соответствует угол в радианах, равный 2π .

$$2\pi = 360^\circ$$

$$\pi = 180^\circ$$



Рассмотрим задачи перехода от одной меры угла к другой.

Задача 1. Сколько радиан в 10° .

Решение. Используя соотношение $\pi = 180^\circ$, составим пропорцию, в которой слева записан угол в радианах, а справа угол в градусах.

$$x - 10^\circ$$

$$\pi - 180^\circ$$

$$\frac{x}{10} = \frac{\pi}{180}$$

$$180x = 10\pi$$

$$x = \frac{10}{180}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{18}$$

Задача 2. Сколько градусов в $\frac{3}{4}\pi$.

Решение. Используя соотношение $\pi = 180^\circ$, запишем

$$\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \cdot 180 = \frac{3 \cdot 180}{4} = 135^\circ$$

Задача 3. Сколько градусов в 2 радианах.

Решение. Используя соотношение $\pi=180^\circ$, составим пропорцию, в которой слева записан угол в радианах, а справа угол в градусах.

$$2 - x^\circ$$

$$\pi - 180^\circ$$

$$\frac{2}{x} = \frac{\pi}{180}$$

$$2 \cdot 180 = \pi \cdot x$$

$$x = \frac{2 \cdot 180}{\pi}$$

$$x = \frac{360}{3,14} \approx 115^\circ$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Зная, что π - это 180° , заполнить пустые клетки таблицы

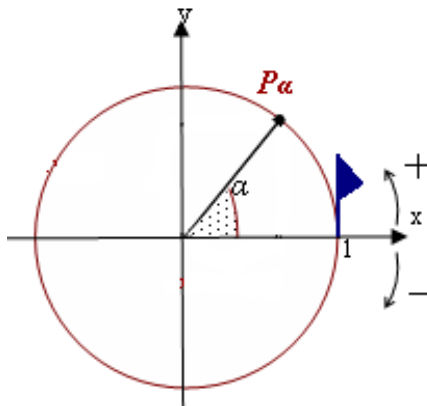
Угол в градусах	30°	550°				
Угол в радианах			$\frac{\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{5}$	4 радиан	5π

2. Что больше 1000° или 10 радиан?

Единичная окружность

Опр. *Единичная окружность* – это окружность, центр которой лежит в начале координат, а радиус равен единице.

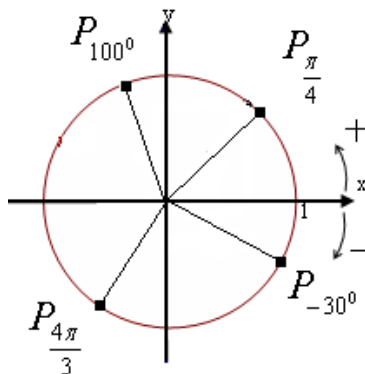
Будем на этой окружности от положительного направления оси OX *против хода* часовой стрелки откладывать **положительные углы**, а *по ходу* часовой стрелки – **отрицательные углы**.



Для любого угла можно найти точку на единичной окружности, причем единственную.

Пусть углу α соответствует единственная точка P_α .

Изобразим точки на единичной окружности P_{100° , $P_{\frac{\pi}{4}}$, P_{-30° , $P_{\frac{4\pi}{3}}$.



Если выбрать точку на единичной окружности, то ей соответствует не один угол, а бесконечное множество углов. Так в точку P_{100° попадут точки для углов: 460° , 820° , -260° и т.д.

Если взять произвольный угол α , то углам вида:

$$\alpha \pm 360^\circ \cdot k \text{ или } \alpha \pm 2\pi k, \text{ где } k - \text{любое целое число}$$

будет соответствовать одна и та же точка на окружности.

Угол $360^\circ = 2\pi$ соответствует полному обороту окружности.

Углы $360^\circ \cdot k = 2\pi k$ соответствуют нескольким полным оборотам окружности.

Знак \pm показывает, что полные обороты можно производить как против хода часовой стрелки, так и по ходу часовой стрелки.

Для нашего примера будем иметь:

$$\alpha = 100^\circ$$

$$460^\circ = 100^\circ + 360^\circ$$

$$820^\circ = 100^\circ + 360^\circ \cdot 2 = 100^\circ + 720^\circ$$

$$-260^\circ = 100^\circ - 360^\circ$$

Для того чтобы найти точку, которая соответствует углу 850° , необходимо выделить полные обороты, поделив угол на 360.

$$\begin{array}{r|l} 850 & 360 \\ 720 & 2 \\ \hline 130 & \end{array}$$

$$850^\circ = 130^\circ + 360^\circ \cdot 2$$

Т.о., $P_{850^\circ} = P_{130^\circ}$, где 130° – это остаток от деления на 360°

Единичная окружность проходит через координатные четверти, которым соответствуют углы единичной окружности.

I четверть : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$0 < \alpha < 90^\circ$$

II четверть : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

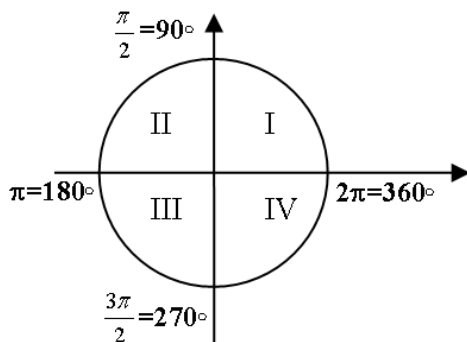
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

III четверть : $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

$$180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

IV четверть : $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$

$$270^\circ < \alpha < 360^\circ$$



Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить углы на единичной окружности и указать, в каких координатных четвертях они располагаются.

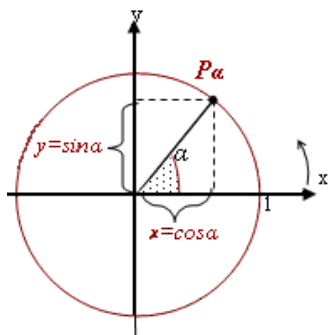
Угол	215°	331°	$\frac{\pi}{3}$	-200°	790°
четверть					

2. Назовите угол в градусах, который лежит во II четверти.

3. Назовите угол в радианах, который лежит во IV четверти.

Тригонометрические функции

Рассмотрим единичную окружность. Для некоторого угла α найдем на окружности точку P_α . Точка P_α имеет две координаты x и y , которые соответственно откладываются по осям OX и OY и называются x - абсциссой и y - ординатой.



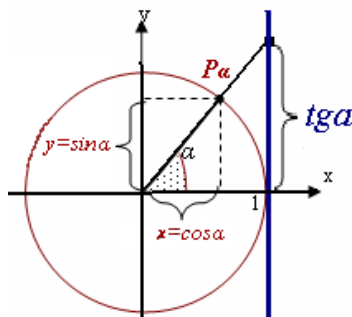
Опр. Косинусом произвольного угла называют абсциссу точки единичной окружности: $x = \cos \alpha$.

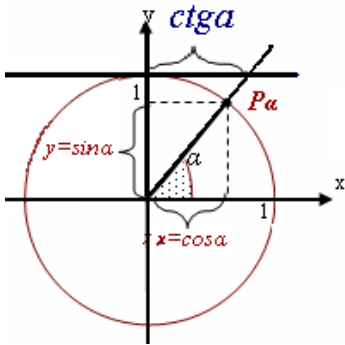
Опр. Синусом произвольного угла называют ординату точки единичной окружности: $y = \sin \alpha$.

Опр. Тангенсом произвольного угла называют отношение синуса к косинусе $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, при условии, что $\cos \alpha \neq 0$

Опр. Котангенсом произвольного угла называют отношение косинуса к синусу $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, при условии, что $\sin \alpha \neq 0$

Тангенс угла связан с *линией тангенса* – это вертикальная прямая, которая проходит через точку $(1;0)$. **Тангенс угла** – это ордината y точки, которая лежит на линии тангенса и соответствует углу.



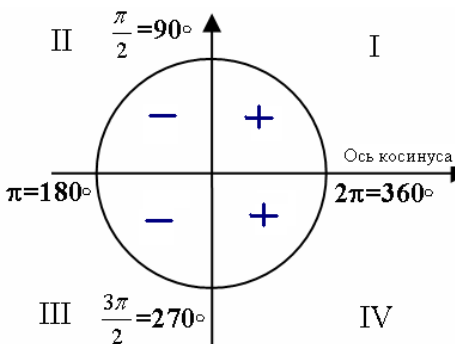


Котангенс угла связан с *линией котангенса* – это горизонтальная прямая, которая проходит через точку $(1;0)$. **Котангенс угла** – это абсцисса x точки, которая лежит на линии котангенса и соответствует углу.

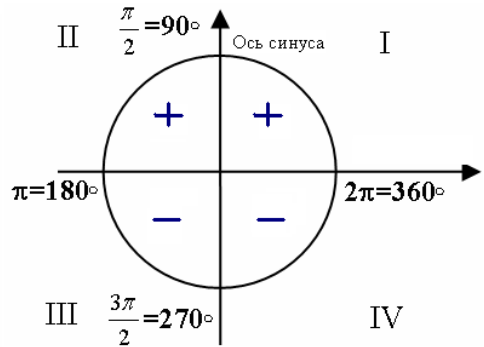
Знаки тригонометрических функций

Согласно определению тригонометрических функций расставим знаки тригонометрических функций по четвертям.

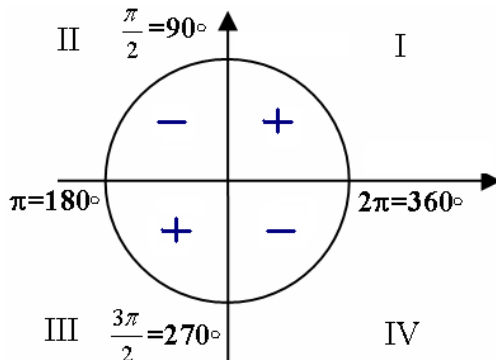
Знаки косинуса *cosa*



Знаки синуса *sina*



Знаки тангенса и котангенса - *tga, ctga*



Задача. Найти знак выражения:

$$\frac{\sin 10^{\circ} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} \cdot \cos 205^{\circ}}{\operatorname{ctg} 350^{\circ} \cdot \sin \frac{10\pi}{7}} = \frac{+ \cdot - \cdot -}{- \cdot -} = +$$

Табличные значения тригонометрических функций

Функция	Аргумент α								
	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Функция	Аргумент α							
	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Основное тригонометрическое тождество.

Основное тригонометрическое тождество выражается формулой:

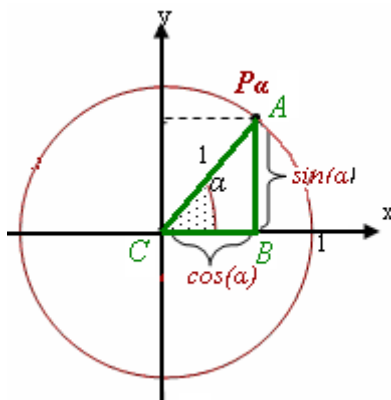
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

сумма квадратов синуса и косинуса угла равна единице

Обоснование формулы следующее: так как, точка лежит на единичной окружности, следовательно, можно построить прямоугольный треугольник ABC с вершиной в точке Pa . Два катета этого прямоугольного треугольника равны соответственно $CB = \cos \alpha$ и $AB = \sin \alpha$. Гипотенуза прямоугольного треугольника CA равна радиусу R , т.е. единице. По теореме Пифагора получим:

$$AB^2 + CB^2 = CA^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



Основное тригонометрическое тождество позволяет, зная одну тригонометрическую функцию, найти все остальные тригонометрические функции.

Рассмотрим решение задач на использование основного тригонометрического тождества.

Задача 1. Известно, что $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ и угол α принадлежит второй

четверти $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Найти значения тригонометрических функций:

$\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение: Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{16} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Т.к. угол лежит во второй четверти, следовательно, косинус имеет знак минус.

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} : \left(-\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Задача 2. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и угол α принадлежит первой четверти $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Найти значения тригонометрических функций: $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

Подставим в основное тригонометрическое тождество выражение для синуса.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$, т.к. угол лежит в первой четверти, то косинус будет

положительным.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}$$

Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции для отрицательного угла

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

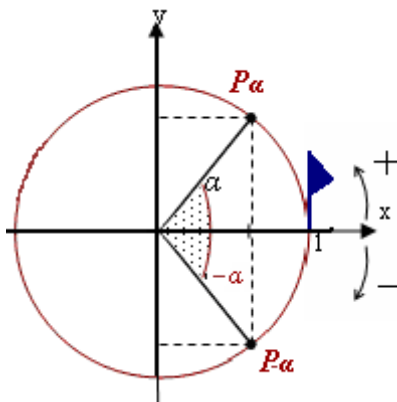
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Напомним, что положительные углы откладываются против хода часовой стрелки, а отрицательные углы - по ходу часовой стрелки. Точкам P_α и $P_{-\alpha}$ соответствуют противоположные углы, при этом, абсциссы x этих точек совпадают, а ординаты y отличаются только знаком. Следовательно, косинусы противоположных углов совпадают, а синусы отличаются только знаком: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

С учетом того, что знаем, найдем тангенс и котангенс для отрицательного угла.



$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Задача. Используя табличные значения и формулы для отрицательных углов, вычислить:

$$\cos\frac{5\pi}{6} \cdot \sin 300^\circ - \operatorname{tg} 330^\circ \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 0 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} + 0 = \frac{3}{4}$$

$$\sin(-45^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-30^\circ) = -\sin 45^\circ \cdot (-\operatorname{tg} 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$$

Формула приведения

Формулы приведения позволяют при нахождении значений тригонометрических функций перейти от углов вида:

$$\alpha \pm 90^\circ k \text{ или } \alpha \pm \frac{\pi}{2} \cdot k, \text{ где } k - \text{любое целое число,}$$

к острому углу α . При этом, если k – число четное, то название функции **не меняется**; если k – число нечетное, то название функции **меняется на кофункцию**. Знак перед приведенной функцией ставится такой, каков знак приводимой (исходной) функции в соответствующей четверти, если считать угол α острым.

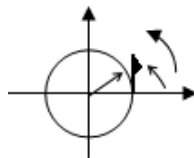
Задача 1. Разложить угол на 90° и воспользоваться формулой приведения

$$A) \cos 405^\circ = \cos(90^\circ \cdot 4 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 405 & 90 \\ \hline 360 & 4 \\ \hline 45 & \end{array}$$

$k=4$, сл-но, функция не меняет свое название

$90^\circ \cdot 4 + 45^\circ$ - делаем 4 оборота в 90° и поворот на 45° . Угол лежит в I четверти, в которой косинус имеет знак плюс.



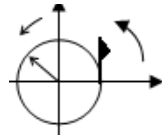
$$B) \operatorname{tg} 510^{\circ} = \operatorname{tg}(90^{\circ} \cdot 5 + 60^{\circ}) = -\operatorname{ctg} 60^{\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$k=5$, сл-но, функция меняет свое название

$90^{\circ} \cdot 5 + 60^{\circ}$ - делаем 5 оборотов в 90° и поворот на 60° .

Угол лежит во II четверти, в которой тангенс имеет знак минус.

$$\begin{array}{r|l} 510 & 90 \\ \hline 450 & 5 \\ \hline 60 & \end{array}$$



Задача 2. Вычислить $\cos(-945^{\circ}) \cdot \operatorname{ctg}(-1830^{\circ}) + \sin(-720^{\circ})$

Воспользуемся формулами для отрицательных углов

$$\cos(-945^{\circ}) \cdot \operatorname{ctg}(-1830^{\circ}) + \sin(-720^{\circ}) = \cos 945^{\circ} \cdot (-\operatorname{ctg} 1830^{\circ}) - \sin 720^{\circ}$$

Вычислим каждое выражение в отдельности:

$$\cos 945^{\circ} = \cos(90^{\circ} \cdot 10 + 45^{\circ}) = -\cos 45^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$k=10$, функция не меняет название, угол лежит в III четверти, где косинус имеет знак минус

$$\operatorname{ctg} 1830^{\circ} = \operatorname{ctg}(90^{\circ} \cdot 20 + 30^{\circ}) = \operatorname{ctg} 30^{\circ} = \sqrt{3}$$

$k=20$, функция не меняет название, угол лежит в I четверти, где котангенс имеет знак плюс

$$\sin 720^{\circ} = \sin(90^{\circ} \cdot 8 + 0) = \sin 0^{\circ} = 0$$

$k=8$, функция не меняет название, угол равен нулю, синус нуля равен нулю

$$\cos 945^{\circ} \cdot (-\operatorname{ctg} 1830^{\circ}) - \sin 720^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} - 0 = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Тригонометрические функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

Задача 1. Применить формулы :

$$\text{A) } \cos(46^\circ)\cos(14^\circ) - \sin(46^\circ)\sin(14^\circ) = \cos(46^\circ+14^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{B) } \cos(36^\circ)\cos(6^\circ) + \sin(36^\circ)\sin(6^\circ) = \cos(36^\circ-6^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{C) } \sin(40^\circ)\cos(5^\circ) + \sin(5^\circ)\cos(40^\circ) = \sin(40^\circ+5^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{D) } \sin(40^\circ)\cos(10^\circ) - \sin(10^\circ)\cos(40^\circ) = \sin(40^\circ-10^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

Задача 2. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если известно, $\operatorname{tg}(\alpha)=-3$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{1}{4}$$

Решение: Воспользуемся формулой тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{-3 + \frac{1}{4}}{1 - (-3) \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{12}{4} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{11}{4}}{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{11}{4}}{\frac{7}{4}} =$$

$$-\frac{11}{4} : \frac{7}{4} = -\frac{11}{4} \cdot \frac{4}{7} = -\frac{11}{7}$$

Воспользуемся формулой тангенса разности

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{-3 - \frac{1}{4}}{1 + (-3) \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{12}{4} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{13}{4}}{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{13}{4}}{\frac{1}{4}} = \\ &= -\frac{13}{4} : \frac{1}{4} = -\frac{13}{4} \cdot \frac{4}{1} = -13 \end{aligned}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Задача 1. Применить формулы:

А) $\sin 38^\circ = 2 \sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ$

$$2 \sin(24^\circ) \cos(24^\circ) = \sin(2 \cdot 24^\circ) = \sin(48^\circ)$$

В) $\cos 7\pi = \cos^2 \frac{7\pi}{2} - \sin^2 \frac{7\pi}{2}$

$$\cos^2(12^\circ) - \sin^2(12^\circ) = \cos(2 \cdot 12^\circ) = \cos(24^\circ)$$

Задача 2. А) вычислить $\cos(2\alpha)$, если известно, что $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$,

Решение:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \sin^2(\alpha) = \frac{1}{9} - \sin^2(\alpha)$$

Необходимо найти $\sin(\alpha)$ -?

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\frac{1}{9} + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{8}{9}$$

Подставим в формулу для двойного аргумента:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{9} - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{7}{9}$$

В) Вычислить $\sin(2\alpha)$, если известно, что $\cos(\alpha) = \frac{2}{7}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Решение: $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

В формуле неизвестен множитель $\sin(\alpha)$ - ?

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\frac{4}{49} + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{4}{49} = \frac{49}{49} - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$$

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{45}{49}} = \pm \frac{\sqrt{5 \cdot 9}}{\sqrt{49}} = \pm \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Угол α принадлежит I четверти $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, следовательно, $\sin(\alpha) > 0$:

$$\sin(\alpha) = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Подставим в формулу двойного аргумента.

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12\sqrt{5}}{49}$$

Задача 3. Вычислить $\operatorname{tg}(2\alpha)$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{2}{7}$

Решение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{-\frac{4}{7}}{1 - \frac{4}{49}} = \frac{-\frac{4}{7}}{\frac{49}{49} - \frac{4}{49}} = \frac{-\frac{4}{7}}{\frac{45}{49}} = -\frac{4}{7} \cdot \frac{49}{45} = \\ &= -\frac{4}{7} \cdot \frac{49}{45} = -\frac{4}{1} \cdot \frac{7}{45} = -\frac{28}{45} \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Упростить: $\cos 11^\circ \cos 19^\circ - \sin 11^\circ \cos 19^\circ$
 $\sin 14^\circ \cos 31^\circ + \sin 31^\circ \cos 14^\circ$
 $2\cos 25^\circ \sin 25^\circ$
 $\cos^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ$

2. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если известно, $\operatorname{tg}(\alpha) = 5$ $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{1}{4}$

3. Вычислить $\cos(2\alpha)$, если известно, что $\sin(\alpha) = -\frac{1}{4}$

4. Вычислить $\sin(2\alpha)$, если известно, что $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

5. Вычислить $\operatorname{ctg}(2\alpha)$, если известно, что $\operatorname{ctg}(\alpha) = 3$

6. α – острый угол, определить в какой четверти лежит угол β и найти знаки тригонометрических функций для угла β

A) $\beta = 90^\circ - \alpha$

B) $\beta = \frac{13\pi}{2} + \alpha$

C) $\beta = 630^\circ - \alpha$

D) $\beta = 9000^\circ + \alpha$

7. Используя табличные значения и формулы для отрицательных углов вычислить:

A) $\sin \frac{5\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$

B) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} + \cos 120^\circ$

C) $\cos(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-60^\circ)$

D) $\sin(-\frac{5\pi}{3}) - \operatorname{tg}(-\frac{11\pi}{6})$

8. Известно, что $\sin(\alpha) = \frac{3}{7}$ и угол α принадлежит второй четверти $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Найти значения тригонометрических функций: $\cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\operatorname{ctg}(\alpha)$.

9. Известно, что $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{3}$ и угол α принадлежит первой четверти $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Найти значения тригонометрических функций: $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\operatorname{ctg}(\alpha)$.

10. Воспользоваться формулой приведения

A) $\sin(90^\circ \cdot 9 - 40^\circ)$

B) $\cos(90^\circ \cdot 8 + 20^\circ)$

C) $\operatorname{tg}(90^\circ \cdot 5 - 10^\circ)$

D) $\operatorname{ctg}(90^\circ \cdot 7 + 70^\circ)$

11. Разложить угол на 90° и воспользоваться формулой приведения

A) $\cos 675^\circ$

B) $\sin 1020^\circ$

C) $\operatorname{tg} 690^\circ$

D) $\operatorname{ctg} 585^\circ$

12. Вычислить

A) $\sin(-1035^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-750^\circ)$

B) $\cos(-930^\circ) - \operatorname{tg}(-390^\circ)$

13. С какой осью связано значение синуса?

14. Назовите угол, для которого косинус и синус имеют знак минус.

15. Назовите отрицательный угол, на который следует повернуться, чтобы попасть в I четверть?

16. Подберите значения синуса и косинуса некоторого угла так, чтобы они удовлетворяли основному тригонометрическому тождеству.

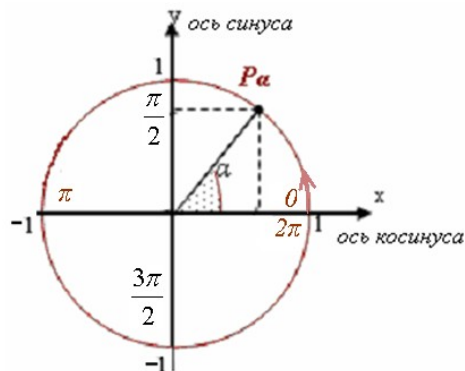
Свойства и графики тригонометрических функций

Рассмотрим тригонометрические функции, для которых в качестве аргумента x будет выступать угол поворота α .

Функция синус - $y = \sin(x)$

Синус угла – это ордината y точки единичной окружности. Рассмотрим на единичной окружности полный оборот от 0 до 2π .

Приведем в таблице базовые точки.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	-1

От 0 до $\frac{\pi}{2}$ синус возрастает по единичной окружности.

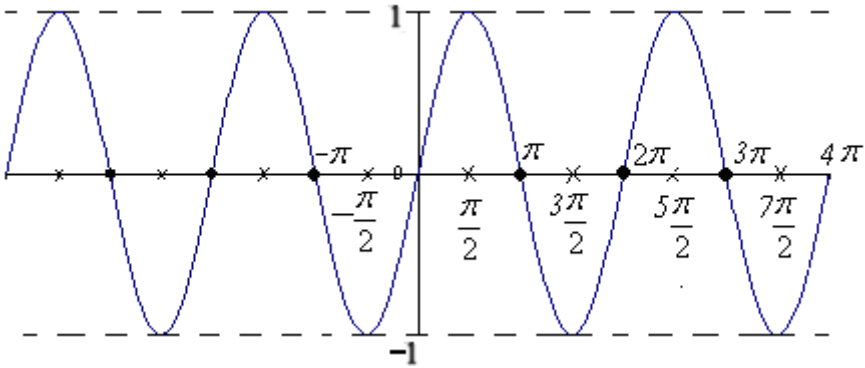
От $\frac{\pi}{2}$ до π синус убывает по единичной окружности

От π до $\frac{3\pi}{2}$ синус убывает по единичной окружности

От $\frac{3\pi}{2}$ до 2π синус возрастает по единичной окружности

Такое же поведение синуса будет на интервале от 2π до 4π , от 4π до 6π и т.д.

Для отрицательных x значения синуса будут противоположными по знаку.

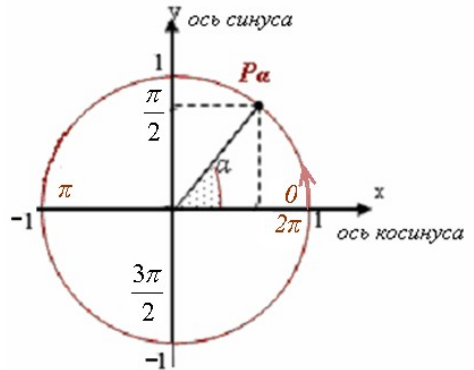


Свойства функции:

1. Область определения Df : x - любое число.
Множество значений Ef: y принимает значения от -1 до 1
2. Немонотонная функция.
3. Ограничена снизу и сверху.
4. Нечетная функция, график симметричен относительно начало координат, $\sin(-x)=-\sin(x)$
5. Периодическая функция с периодом $T=2\pi=360^\circ$.
6. Непрерывная функция.

Функция косинус - $y=\cos(x)$

Косинус – это абсцисса x точки единичной окружности.
Рассмотрим на единичной окружности полный оборот от 0 до 2π .
Приведем в таблице базовые точки.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	1	0	-1	0	1

От 0 до $\frac{\pi}{2}$ косинус убывает по единичной окружности.

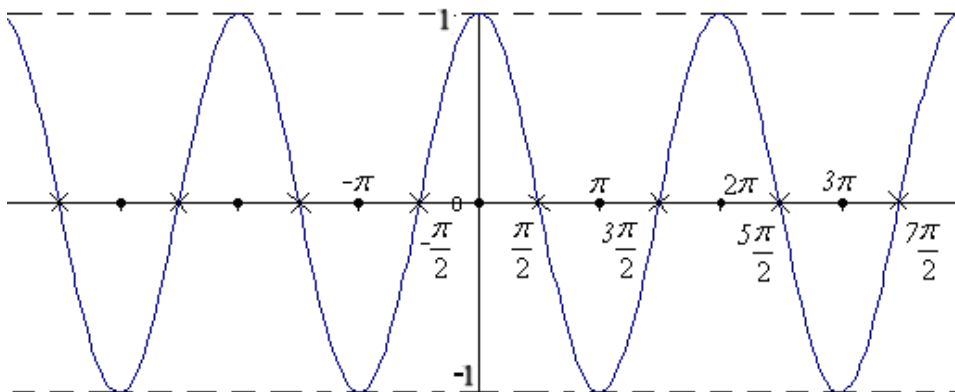
От $\frac{\pi}{2}$ до π косинус убывает по единичной окружности

От π до $\frac{3\pi}{2}$ косинус возрастает по единичной окружности

От $\frac{3\pi}{2}$ до 2π косинус возрастает по единичной окружности

Такое же поведение косинуса будет на интервале от 2π до 4π , от 4π до 6π и т. д.

Для отрицательных x значения косинуса будут такими же.

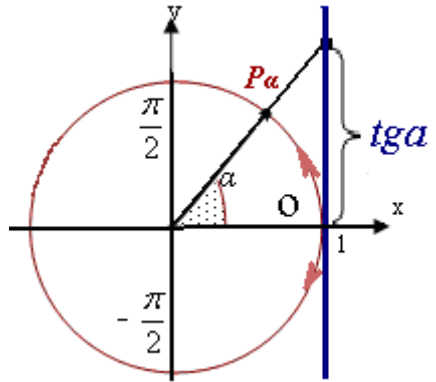


Свойства функции:

1. Область определения Df : x - любое число.
Множество значений Ef : y принимает значения от -1 до 1
2. Немонотонная функция.
3. Ограничена снизу и сверху.
4. Четная функция, график симметричен относительно оси OX :
 $\cos(-x) = \cos(x)$
5. Периодическая функция с периодом $T = 2\pi = 360^\circ$.
6. Непрерывная функция.

Функция тангенс $y = \operatorname{tg}(x)$

Тангенс угла – это ордината y точки, которая лежит на линии тангенса и соответствует углу.



Рассмотрим на единичной

окружности поворот от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Приведем в таблице базовые точки.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	-	-1	0	1	-

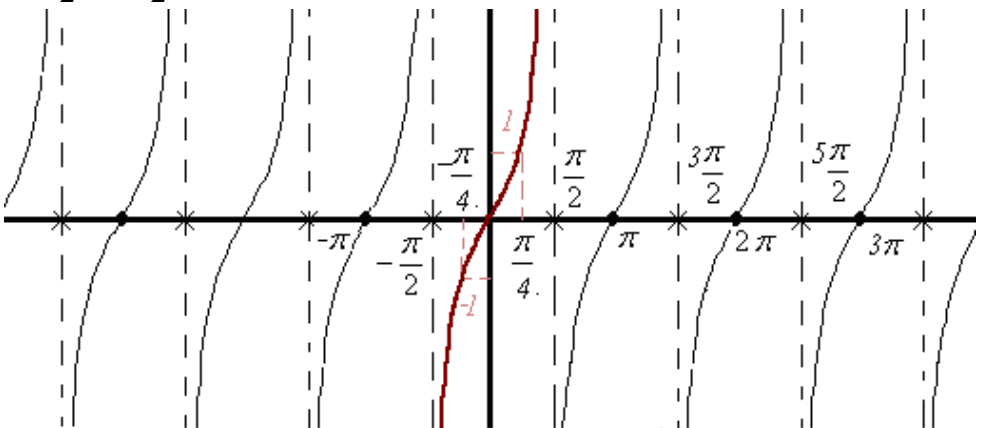
От $-\frac{\pi}{2}$ до 0 тангенс возрастает по линии тангенса.

От 0 до $\frac{\pi}{2}$ тангенс возрастает по линии тангенса.

В точках $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$ и т.д. тангенс не существует.

Такое же поведение тангенса будет на интервале от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$,

от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ и т.д.



Свойства функции:

1. Область определения Df : x - любое число, кроме точек вида

$$\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot k, \text{ где } k \text{ целое число}$$

Множество значений Ef: y – любое число

2. Возрастающая функция на интервалах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$,

от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ и т.д.

3. Неограниченная функция.

4. Нечетная функция, график симметричен относительно начало координат : $tg(-x)=-tg(x)$

5. Периодическая функция с периодом $T=\pi=180^\circ$.

6. Не является непрерывной, имеет точки разрыва

$$\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot k, k - \text{целое число.}$$

7. Пределы в точках разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} tg(x) = +\infty \quad - \text{предел слева от точки } -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} tg(x) = -\infty \quad - \text{предел справа от точки } -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} tg(x) = +\infty \quad - \text{предел слева от точки } \frac{\pi}{2}$$

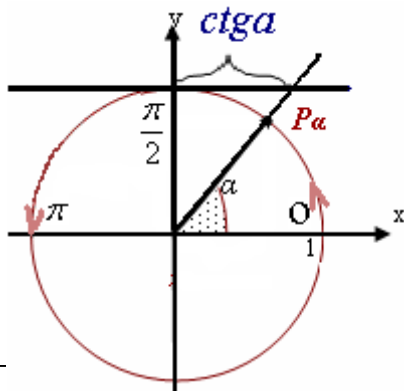
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} tg(x) = -\infty \quad - \text{предел справа от точки } \frac{\pi}{2}$$

Функция котангенс $y = \text{ctg}(\alpha)$

Котангенс угла – это координата x точки, которая лежит на линии котангенса и соответствует углу.

Рассмотрим на единичной окружности поворот от 0 до π .

Приведем в таблице базовые точки.



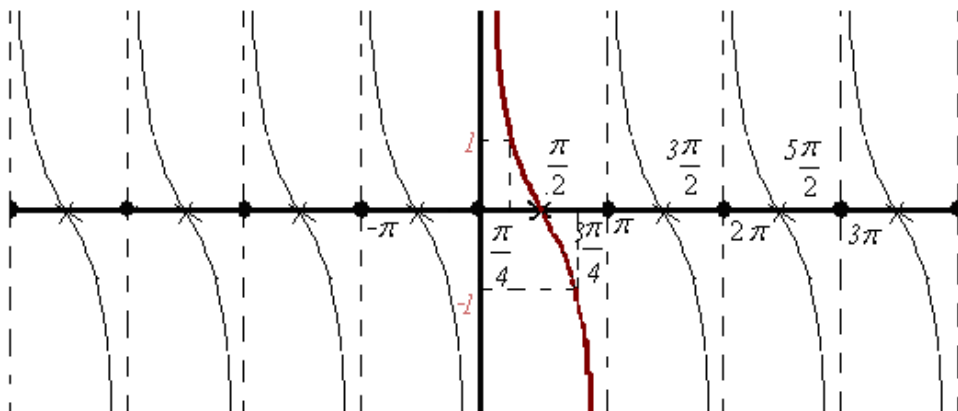
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\text{sin}(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

От 0 до $\frac{\pi}{2}$ котангенс убывает по линии котангенса.

От $\frac{\pi}{2}$ до π котангенс убывает по линии котангенса.

В точках $0 \pm \pi, \pm 2\pi$ и т.д. котангенс не существует.

Такое же поведение котангенса будет на интервале от π до 2π , от 2π до 4π и т.д.



Свойства функции:

1. Область определения Df : x – любое число, кроме точек вида $\pi \cdot k$, где k целое число

Множество значений Ef : y – любое число

2. Убывающая функция на интервалах от 0 до π , от π до 2π ,

от 2π до 4π и т.д.

3. Неограниченная функция.

4. Нечетная функция, график симметричен относительно начало координат : $ctg(-x) = -ctg(x)$

5. Периодическая функция с периодом $T = \pi = 180^\circ$.

6. Не является непрерывной, имеет точки разрыва $\pi \cdot k$, где k – целое число.

7. Пределы в точках разрыва:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} ctg(x) = -\infty$ - предел слева от точки 0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} ctg(x) = +\infty$ - предел справа от точки 0

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} ctg(x) = -\infty$ - предел слева от точки π

$\lim_{x \rightarrow \pi^+} ctg(x) = +\infty$ - предел справа от точки π

Задачи для самостоятельного решения

1. Выбрав в качестве π четыре клетки, построить график $y = \sin(x)$

2. Выбрав в качестве π шесть клеток, построить график $y = \cos(x)$

3. Выбрав в качестве π две клетки, построить график $y = tg(x)$

4. Выбрав в качестве π три клетки, построить график $y = ctg(x)$

Преобразования графиков тригонометрических функций

Для графиков тригонометрических функций рассмотрим следующие преобразования.

1. *Растяжение (сжатие) вдоль оси OY :*

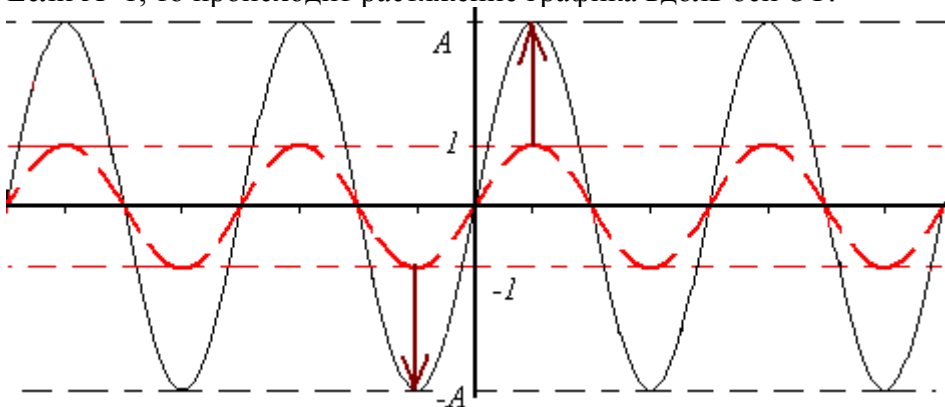
$$y=A \cdot f(x),$$

$A > 0$ - амплитуда.

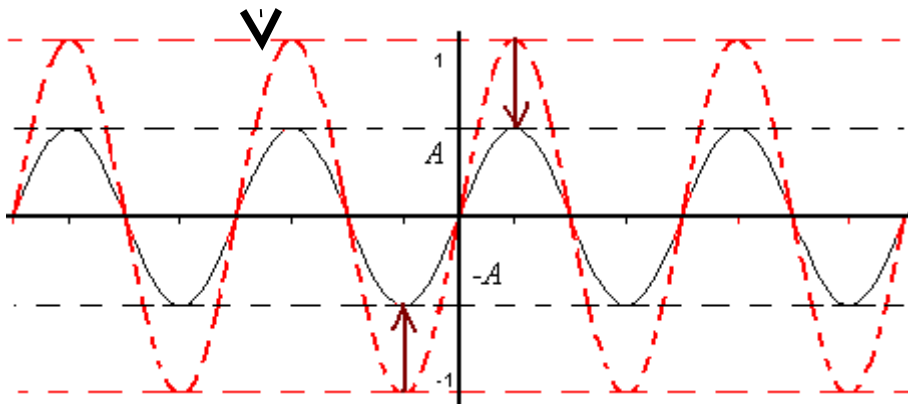
График функции $y=A \cdot f(x)$ получается из графика $y=f(x)$ путем растяжения (сжатия) относительно оси OY .

Для функций $y=A \cdot \sin(x)$ и $y=A \cdot \cos(x)$ меняется множество значений функции $[-1; 1]$ на интервал $[-A; A]$

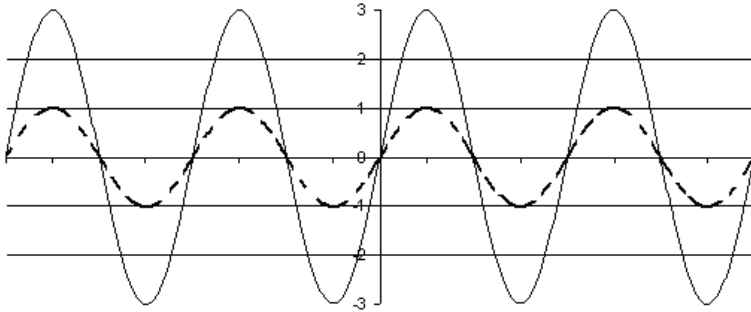
Если $A > 1$, то происходит растяжение графика вдоль оси OY .



Если $0 < A < 1$, то происходит сжатие графика вдоль оси OY .



Пример. $y=3\sin(x)$



2. *Растяжение (сжатие) вдоль оси OX:*

$$y=f(\omega x),$$

где $\omega > 0$ – частота

График функции $y=f(\omega x)$ получается из графика $y=f(x)$ путем сжатия или растяжения относительно оси OX .

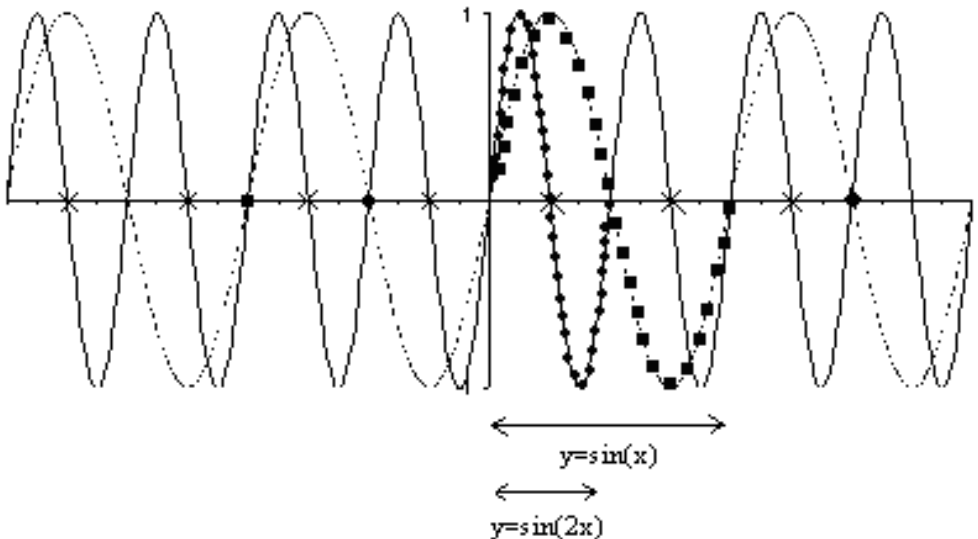
Для тригонометрических функций меняется период функции:

Старый период - $T=2\pi$

Новый период - $T' = \frac{2\pi}{\omega}$

Если $\omega > 1$, то период уменьшается, график «быстрее» пробегает свои значения

На чертеже представлен график функции $y=\sin(2x)$.



$\omega = 2T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ - новый период функции, т.о. период уменьшился в 2 раза.

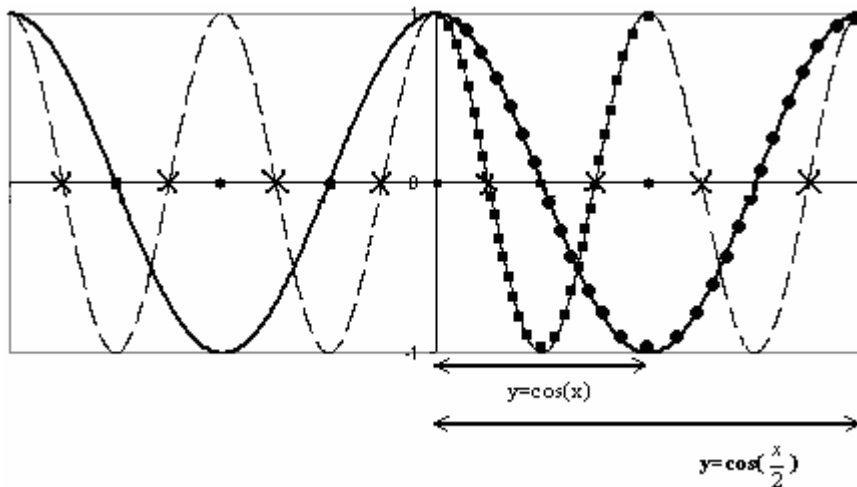
Если $\omega < 1$, то период увеличивается, график «медленнее» пробегает свои значения.

На чертеже представлен график функции $y = \cos\frac{x}{2}$.

$$\omega = \frac{1}{2}$$

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{1}\pi = 4\pi$$
 - новый период функции, т.о. период

увеличился в два раза с 2π до 4π .



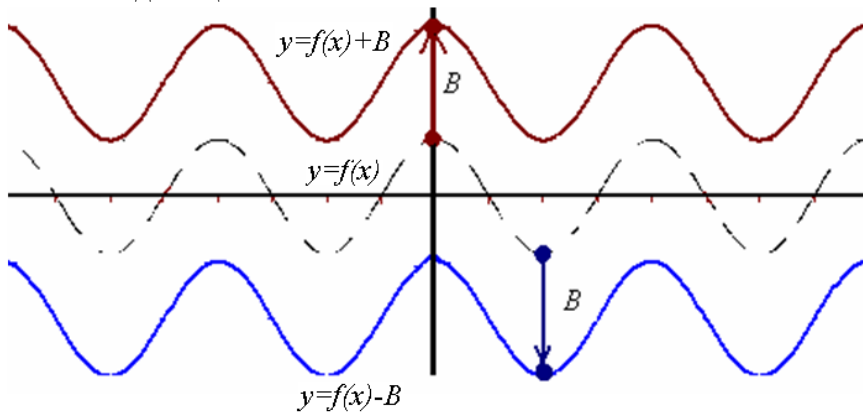
3. *Сдвиг вдоль оси OY:*

$$y=f(x)\pm B,$$

где $B>0$

График функции $y=f(x)+B$ можно получить из графика $y=f(x)$ путем сдвига на B единиц вверх.

График функции $y=f(x)-B$ можно получить из графика $y=f(x)$ путем сдвига на B единиц вниз.



4. *Сдвиг вдоль оси OX:*

$$y=f(x\pm b),$$

где $b>0$

График функции $y=f(x-b)$ можно получить из графика $y=f(x)$ путем сдвига на b единиц вправо.

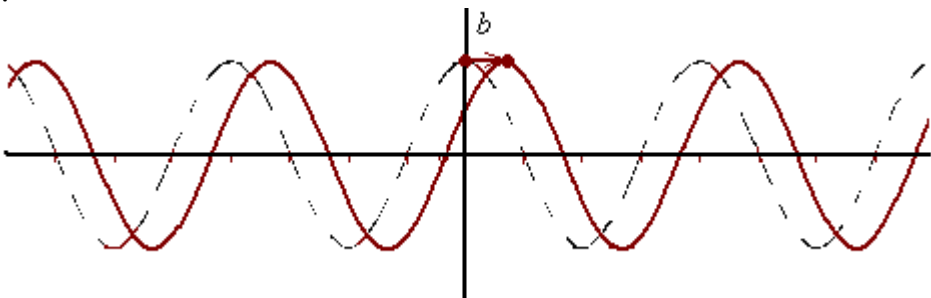
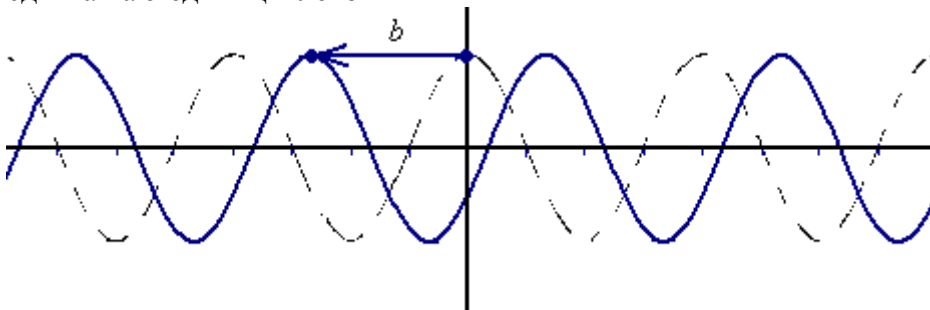


График функции $y=f(x+b)$ можно получить из графика $y=f(x)$ путем сдвига на b единиц влево



Задачи для самостоятельного решения

1. Построить график $y=0,5 \cdot \sin(x)$
2. Построить график $y=\cos(3x)$
3. Построить график $y=\operatorname{tg}(x)+2$
4. Построить график $y=\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{3})$

Обратные тригонометрические функции

Известны следующие тригонометрические функции:

$$y = \sin(x), y = \cos(x), y = \operatorname{tg}(x), y = \operatorname{ctg}(x)$$

На интервалах, где тригонометрические функции монотонно возрастают или монотонно убывают, тригонометрические функции имеют себе обратные функции.

Арксинус (*arcsin*) числа – это угол, синус которого равен этому числу.

Пример: известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, тогда $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Арксинус – это обратная синусу функция, которая определена на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Арккосинус (*arccos*) числа – это угол, косинус которого равен этому числу.

Пример: известно, что $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Арккосинус – это обратная косинусу функция, которая определена на интервале $(0; \pi)$

Арктангенс (*arctg*) числа – это угол, тангенс которого равен этому числу.

Пример: известно, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Арктангенс – это обратная тангенсу функция, которая определена на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Арккотангенс (*arcctg*) числа – это угол, котангенс которого равен этому числу.

Пример: известно, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, тогда $\operatorname{arcctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$

Арккотангенс – это обратная котангенсу функция, которая определена на интервале $(0; \pi)$

Обратные тригонометрические функции используются для решения тригонометрических уравнений.

Для нахождения значений обратных тригонометрических функций можно использовать табличные значения тригонометрических функций:

x	$-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$	$-\frac{\pi}{3} = -60^\circ$	$-\frac{\pi}{4} = -45^\circ$	$-\frac{\pi}{6} = -30^\circ$	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
Sin(x)	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$	$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$	$\pi = 180^\circ$
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

x	$-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$	$-\frac{\pi}{3} = -60^\circ$	$-\frac{\pi}{4} = -45^\circ$	$-\frac{\pi}{6} = -30^\circ$	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
tg(x)	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

x	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$	$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$	$\pi = 180^\circ$
ctg(x)	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Тригонометрические уравнения

К простейшим тригонометрическим уравнениям относят уравнения вида:

$$\sin(x)=a, \text{ где } a \text{ число от } -1 \text{ до } 1$$

$$\cos(x)=a, \text{ где } a \text{ число от } -1 \text{ до } 1$$

$$\operatorname{tg}(x)=a, \text{ где } a \text{ любое число}$$

$$\operatorname{ctg}(x)=a, \text{ где } a \text{ любое число}$$

Примеры: $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(x)=0$; $\operatorname{tg}(x)=-1$; $\operatorname{ctg}(x)=3$

Дадим обоснование формулам, которые используются при решении тригонометрических уравнений.

1. $\sin(x)=a$, где a число от -1 до 1
 $x=(-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

Согласно уравнению нам известно значение синуса, число a , которое можно отложить по оси OY .

Требуется найти углы, которые будут удовлетворять уравнению, т.к. функция синуса периодическая, следовательно, углов будет бесконечное множество.

Первый угол - α

Второй угол - $\pi - \alpha$

Для того чтобы получить следующую пару углов, необходимо прибавить период 2π : $\alpha + 2\pi$ и $\pi - \alpha + 2\pi = -\alpha + 3\pi = 3\pi - \alpha$.

Прибавляя каждый раз период 2π , будем получать следующие углы: $\alpha + 2\pi k$ и $\pi - \alpha + 2\pi k$, где k целое число.

Проверим формулу $x=(-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi k$ для различных $k \in \mathbf{Z}$

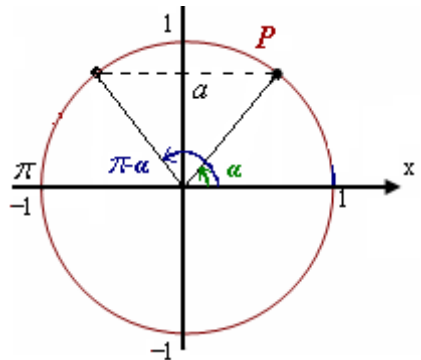
$$k=0 - x=(-1)^0 \cdot \arcsin(a) + \pi \cdot 0 = \arcsin(a) = \alpha$$

$$k=1 - x=(-1)^1 \cdot \arcsin(a) + \pi \cdot 1 = -\arcsin(a) + \pi = -\alpha + \pi = \pi - \alpha$$

$$k=2 - x=(-1)^2 \cdot \arcsin(a) + \pi \cdot 2 = \arcsin(a) + \pi \cdot 2 = \alpha + 2\pi$$

$$k=3 - x=(-1)^3 \cdot \arcsin(a) + \pi \cdot 3 = -\arcsin(a) + \pi \cdot 3 = -\alpha + 3\pi = 3\pi - \alpha$$

Обобщая получим:



Если $k=2n$ – четное число, то $x=(-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi k = \arcsin(a) + \pi k = \alpha + 2\pi n$, где n – любое целое число.

Если $k=2n+1$ – нечетное число, то $x=(-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi k = -\arcsin(a) + \pi(2n+1) = -\alpha + 2\pi n + \pi = \pi - \alpha + 2\pi n$, где n – любое целое число

Т.о. рассуждения по чертежу и предлагаемая формула дают одно и тоже множество решений.

2. $\cos(x)=a$, где a число от -1 до 1
 $x=\pm \arccos(a) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Согласно уравнению нам известно значение косинуса, число a , которое можно отложить по оси ОХ.

Требуется найти углы, которые будут удовлетворять уравнению, т.к. функция косинуса периодическая, следовательно, углов будет бесконечное множество.

Первый угол - α

Второй угол - $-\alpha$

Для того чтобы получить следующую пару углов, необходимо прибавить период 2π : $\alpha+2\pi$ и $-\alpha+2\pi$.

Прибавляя каждый раз период 2π , будем получать следующие углы: $\alpha+2\pi k$ и $-\alpha+2\pi k$, где k целое число.

Проверим формулу $x=\pm \arccos(a) + 2\pi k$, для различных $k \in \mathbb{Z}$

$$k=0 - x=\pm \arccos(a) + 2\pi \cdot 0 = \pm \arccos(a) = \pm \alpha$$

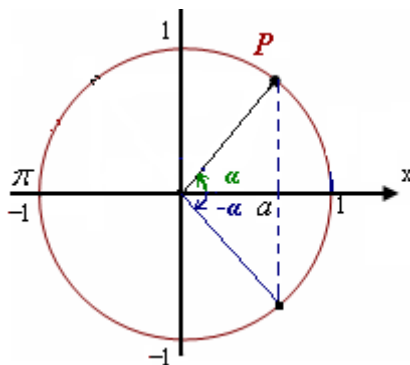
$$k=1 - x=\pm \arccos(a) + 2\pi \cdot 1 = \pm \arccos(a) + 2\pi = \pm \alpha + 2\pi$$

$$k=2 - x=\pm \arccos(a) + 2\pi \cdot 2 = \pm \arccos(a) + 4\pi = \pm \alpha + 4\pi$$

$$k=3 - x=\pm \arccos(a) + 2\pi \cdot 3 = \pm \arccos(a) + 6\pi = \pm \alpha + 6\pi$$

Обобщая получим: - $x=\pm \alpha + 2\pi k$

Т.о. рассуждения по чертежу и предлагаемая формула дают одно и тоже множество решений.



3. $\operatorname{tg}(x)=a$, где a любое число

$$x=\operatorname{arctg}(a)+\pi k, k \in Z$$

Согласно уравнению нам известно значение тангенса, число a , которое можно отложить по оси тангенса.

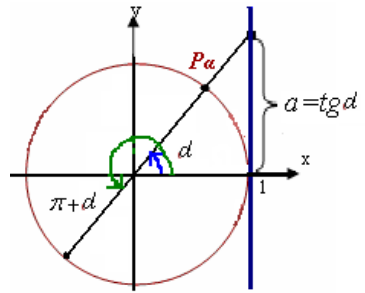
Требуется найти углы, которые будут соответствовать числу a

Первый угол - α

Второй угол - $\pi+\alpha$

Т.к. функция тангенса периодическая, следовательно, чтобы получить другие углы, следует прибавить период π :

$x=\alpha+\pi k, k \in Z$, учитывая, что α – это арктангенс числа a , получим формулу: $x=\operatorname{arctg}(a)+\pi k, k \in Z$



4. $\operatorname{ctg}(x)=a$, где a любое число

$$x=\operatorname{arccctg}(a)+\pi k, k \in Z$$

Дать самостоятельно обоснование формулы, используя линию котангенса.

Решение задач

Задача 1. Решить уравнения:

$$A) \sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=(-1)^k \cdot \arcsin(a)+\pi k, k \in Z$$

$$x=(-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi k, k \in Z$$

$$x=(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3}+\pi k, k \in Z$$

$$B) \cos(x)=\frac{4}{7} \quad a=\frac{4}{7}$$

$$x=\pm \arccos\left(\frac{4}{7}\right)+2\pi k, k \in Z$$

$$C) \operatorname{tg}(x) = -1 \quad a = -1$$

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, \quad k \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$D) \operatorname{ctg}(x) = \sqrt{3} \quad a = \sqrt{3}$$

$$x = \operatorname{arccctg}(\sqrt{3}) + \pi k, \quad k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$$

Задача 2. Решить уравнения:

$$A) \sin(7x) = \frac{1}{2}$$

$$7x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in Z$$

$$7x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z \quad \left(x = \frac{1}{7}\right)$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{7 \cdot 6} + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in Z$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{42} + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in Z$$

$$B) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x}{3} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \pi k, \quad k \in Z \quad (x \cdot 3)$$

$$x = 3 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + 3\pi k, \quad k \in Z$$

$$C) \cos\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{7} = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$x - \frac{\pi}{7} = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$x - \frac{\pi}{7} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \cdot \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \left(x = \frac{1}{2}\right)$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{\pi}{2} k,$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача. Решить уравнения:

$$A) \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$B) \cos(x) = \frac{1}{5}$$

$$C) \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D) \operatorname{ctg}(x) = 2$$

$$E) \sin(4x) = -\frac{2}{7}$$

$$F) \operatorname{tg}(7x) = -1$$

$$G) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H) \operatorname{ctg}\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{6}$$

$$I) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Тест по теме «Тригонометрия»

1. Основное тригонометрическое тождество – это

A) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$	B) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	C) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$	D) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$
--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

2. Синус – это

A) координата X точки единичной окружности	B) отношение катетов прямоугольного треугольника	C) отношение катета прилежащего угла к гипотенузе прямоугольного треугольника	D) координата Y точки единичной окружности
--	--	---	--

3. Косинус разности $\cos(\alpha - \beta)$ равен:

A) $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	B) $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	C) $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	D) $\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$
--	--	--	--

4. Тангенс суммы $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ равен

A) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	C) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$	D) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$
--	--	--	--

5. Косинус двойного аргумента $\cos(2\alpha)$ равен

A) $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	B) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$	C) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$	D) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
-----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

6. Указать верные равенства:

A) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	B) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	C) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	D) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
--	---	--	---

7. Синус имеет знак плюс на интервалах:

A) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	B) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	C) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	D) $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
----------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

8. Котангенс имеет знак минус на интервалах:

A) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	B) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	C) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	D) $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
----------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

9. Косинус отрицательного угла $\cos(-\alpha)$ равен

A) $\cos(\alpha)$	B) $-\cos(-\alpha)$	C) $-\cos(\alpha)$
-------------------	---------------------	--------------------

10. Используя формулу приведения, название функции не меняется, если для приведенного угла $90^\circ \cdot k + \alpha$, справедливо:

A) k – четное число	B) k – нечетное число	C) k – любое число
---------------------	-----------------------	--------------------

11. Сколько градусов в числе: $\pi =$

12. Назовите угол, для которого: косинус равен нулю

13. Как откладываются положительные углы для точек единичной окружности?

Список литературы

- Алимов Ш. А. и др.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М., 2014.
- Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.* Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М., 2014.
- Башмаков М. И.* Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
- Башмаков М. И.* Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
- Башмаков М. И.* Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.
- Башмаков М. И.* Математика. Электронный учеб.-метод. комплекс для студ. Учреждений сред. проф. образования. — М., 2015.
- Башмаков М. И.* Математика (базовый уровень). 10 класс. — М., 2014.
- Башмаков М. И.* Математика (базовый уровень). 11 класс. — М., 2014.
- Башмаков М. И.* Алгебра и начала анализа, геометрия. 10 класс. — М., 2013.
- Башмаков М. И.* Математика (базовый уровень). 11 класс. Сборник задач: учеб. пособие. — М., 2012.
- Богомолов Н.В.* Математика для ссузов - М. Дрофа, 2015
- Богомолов Н.В.* Сборник задач по математике _ М.: Дрофа, 2015.